RIVISTA

DI

MATEMATICA

DIRETTA

DA

G. PEANO

Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino

---

Volume I

TORINO

FRATELLI BOCCA

LIBRAI DI S. M.

1891

RIVISTA DI MATEMATICA

Principii di Logica Matematica.

Nota di G. Peano.

Già Leibniz [1] enunciò alcune analogie fra le operazioni dell'algebra e quelle della logica. Ma solo in questo secolo, per opera di Boole, Schröder, e altri molti [2], si studiarono queste relazioni, sicchè la logica deduttiva è diventata, come l'algebra ordinaria, la teoria dei quaternioni [3], ecc., una parte del calcolo delle operazioni.

Uno dei risultati più notevoli cui si è giunto si è che, con un numero limitatissimo (7) di segni, si possono esprimere tutte le relazioni logiche immaginabili; sicchè aggiungendovi dei segni per rappresentare gli enti dell'algebra, o della geometria, si possono esprimere tutte le proposizioni di queste scienze [4].

Nella presente Nota espongo sommariamente tali teorie, collo scopo di invogliare il lettore a questo genere di studi interessanti, e di prepararmi uno strumento quasi indispensabile in ricerche successive.

§ 1. — *Deduzione e congiunzione.*

In questo § le lettere a, b,... indicano delle proposizioni qualunque.

La scrittura $a \supset b$ significa « dalla a si deduce la b, » e si può leggere « se è vera la a, è vera la b, » ovvero « se a, allora b, » e anche sotto altre forme [5].

La scrittura $a = b$ significa che le proposizioni a e b sono equivalenti, ossia che dalla prima si deduce la seconda, e viceversa.

L'affermazione simultanea di più proposizioni a, b, c,... si indicherà scrivendole l'una dopo l'altra abc... Questa affermazione simultanea chiamasi *congiunzione* o *moltiplicazione logica*. Si ha:

$$1.\ ab = ba\,;$$
$$2.\ (ab)c = a(bc) = abc.$$

Queste identità esprimono le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione logica, analoghe a quelle della moltiplicazione algebrica.

$$3.\ aa = a.$$

Questa identità non ha l'analoga in algebra [6].

Per separare le varie proposizioni fra loro potremmo servirci delle parentesi come in algebra. Si arriva allo stesso risultato con maggior semplicità, e senza produrre equivoci colle parentesi nelle formole algebriche, con una conveniente punteggiatura. I segni di punteggiatura sono . : .·. : : .·.·. ecc. Per leggere una formola divisa coi punti, prima si uniranno tutti i segni non separati da alcun punto, poi quelli da 1, poi quelli da 2, e così via ([7]).

Si ha:

$$4.\ a = b . = . b = a.$$

« La proposizione $a = b$ equivale alla $b = a$. »

$$5.\ a = b . =: a \supset b . b \supset a.$$

« Due proposizioni a e b sono equivalenti quando dalla prima si deduce la seconda e viceversa. »

Le formole seguenti rappresentano varie specie di *sillogismi:*

$$6.\ a \supset b . b \supset c : \supset . a \supset c$$
$$7.\ a = b . b \supset c : \supset . a \supset c$$
$$8.\ a \supset b . b = c : \supset . a \supset c$$
$$9.\ a = b . b = c : \supset . a = c.$$

Il *sorite* ha la forma

$$10.\ a \supset b . b \supset c . c \supset d : \supset . a \supset d.$$

Si ha:

$$11.\ a \supset b . \supset . ac \supset bc.$$
$$12.\ a = b . \supset . ac = bc$$
$$13.\ a \supset b . c \supset d : \supset . ac \supset bd.$$
$$14.\ a = b . c = d : \supset . ac = bd.$$

Queste formole dicono che ai due membri d'una deduzione o d'una eguaglianza logica si può congiungere una stessa proposizione; e che due deduzioni o due eguaglianze si possono congiungere fra loro membro a membro.

§ 2. — *Proposizioni singolari; Classi.*

I nomi che adoperiamo rappresentano ora individui (nomi proprii) come 1, 2, $\frac{3}{4}$, $\sqrt{2}$,...; ed ora delle classi (nomi comuni od aggettivi) come *numero, poligono, equilatero,* ecc.

La scrittura $a = b$, ove a e b siano individui, indica la loro identità, ovvero che a e b sono due nomi dati ad uno stesso individuo. Se a e b

sono classi, quella scrittura indica che le due classi coincidono, ossia che ogni a è b, e viceversa. Già si è spiegato il significato di quella scrittura se a e b sono proposizioni.

Per indicare la proposizione singolare « x è un individuo della classe s » scriveremo (8)

$$x \varepsilon s,$$

e il segno ε si potrà leggere *è*, o *è un*, o *fu*, o *sarà*, a seconda delle regole grammaticali; però il suo significato è sempre quello spiegato.

Per brevità scriveremo $x, y, z \varepsilon s$ per indicare che x, y, z sono degli s, ossia

$$x, y, z \varepsilon s. =: x \varepsilon s. y \varepsilon s. z \varepsilon s.$$

Per indicare la proposizione universale « ogni a è b, » ossia « la classe a è contenuta nella b » scriveremo $a \supset b$. Quindi il segno $\supset$ si leggerà diversamente (*si deduce*, o *è contenuto*) secondochè sta fra due proposizioni o fra due classi; però le sue proprietà sono le stesse in ambi i casi.

Essendo a e b due classi, con ab indicheremo l'insieme degli enti che sono ad un tempo a e b, cioè la massima classe contenuta in a e in b. Analogamente per abc ecc. Però, se havvi pericolo d'equivoco, si scriverà $a \frown b$ e $a \frown b \frown c$ al posto di ab e di abc.

Sussistono tutte le formole del § precedente, quando $a, b, \ldots$ rappresentano delle classi.

Per esercizio, si possono trasformare in linguaggio ordinario le proposizioni:

$5 = 2 + 3$; 5ε (numero primo); $4 =$ (massimo comun divisore di 8 e 12); 4ε (divisore di 12); (triangolo) $\supset$ (poligono); (triangolo equiangolo) $=$ (triangolo equilatero); (multiplo di 6) $=$ (multiplo di 2) $\frown$ (multiplo di 3);

e in simboli le proposizioni:

i multipli di 6 *sono* numeri pari; il cubo di 2 *è* 8; i numeri pari *sono* i multipli di 2; fra i numeri cubi *è contenuto* il 27.

§ 3. — *Applicazioni.*

I segni introdotti ε, $=$, $\supset$ permettono già di esprimere un grande numero di relazioni logiche. Quindi, introdotti dei simboli per indicare gli individui, le classi, le operazioni e le relazioni d'una scienza, siamo già in grado di enunciarne completamente delle proposizioni. Prenderemo ad esempio l'algebra, ove già sonvi i simboli 1, 2,... per rappresentarne gli individui, $+$, $-$, $\times$, ecc. per le operazioni, $>$, $<$, $=$,... per le

relazioni, e introdurremo dei segni per rappresentare le classi che più spesso si presentano. Scriveremo:

N al posto di « numero intero positivo »
n » « numero intero »
R » « numero razionale positivo »
r » « numero razionale »
Q » « numero reale positivo » o « quantità positiva »
q » « numero o quantità reale, » che diremo *numero* senz'altro.

Il vantaggio di questi simboli non sta solo nella brevità, ma anche nel loro significato esatto, e nel poterli introdurre nelle formole. Si ha:

1. $a, b \varepsilon \mathrm{q}. \supset. a + b \varepsilon \mathrm{q}.$

« Se a e b sono due quantità, anche $a+b$ è una quantità determinata. »

2. $a, b \varepsilon \mathrm{q}. b \gtrless 0 \colon \supset. \frac{a}{b} \varepsilon \mathrm{q}.$

« Essendo a e b due quantità, di cui la seconda non nulla, $\frac{a}{b}$ rappresenta una quantità determinata e finita. »

3. $a, b \varepsilon \mathrm{q}. \supset. a \times b = b \times a.$

« Indicando con a, b due numeri, si ha ecc. »

4. $m, n \varepsilon \mathrm{N}. a \varepsilon \mathrm{q} \colon \supset. a^{m+n} = a^m a^n$

« Chiamando m ed n due numeri interi e positivi, ed a un numero reale, si ha ecc. »

5. $m, n \varepsilon \mathrm{q}. a \varepsilon \mathrm{Q} \colon \supset. a^{m+n} = a^m a^n$

« Essendo m ed n due numeri reali, ed a un numero positivo, si ha ecc. »

In modo analogo si enunciano tutte le identità dell'algebra.

6. $a, b, c \varepsilon \mathrm{q}. a < b \colon \supset. a + c < b + c$

7. $m, n \varepsilon \mathrm{Q}. m < n \colon \supset. \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Analogamente si enunciano le deduzioni da una relazione ad un'altra.

8. $a, b, x, y \varepsilon \mathrm{q}. \supset \therefore x + y = a. x - y = b \colon = \colon 2x = a + b. 2y = a - b$

« Essendo a, b, x, y dei numeri, il sistema di equazioni

$$x + y = a \quad \text{e} \quad x - y = b$$

è equivalente al sistema

$$2x = a + b, \quad 2y = a - b. \text{ »}$$

9. $x, y \varepsilon \mathrm{q}. \supset .\because. x^2 + y^2 = 0. =: x = 0. y = 0$

« Essendo x, y dei numeri (reali), $x^2 + y^2$ è nullo quando e solo quando si annullano ad un tempo x e y. »

In modo analogo si esprimono le relazioni fra equazioni e proposizioni.

§ 4. — *Segni* $-$, $\cup$, $\wedge$ (9).

Essendo a una proposizione, con $-a$ intendiamo la negazione della a. Se a, b, c, rappresentano proposizioni, si ha:

1. $-(-a) = a$ « Due negazioni fanno una affermazione. »
2. $a = b. =. -a = -b$
3. $a \supset b. =. -b \supset -a$

« La proposizione: da a si deduce b, è equivalente alla: da non b si deduce non a. »

Per comodità di scrittura alcuna volta invece di scrivere il segno $-$ davanti a tutta la proposizione, lo scriveremo davanti al segno di relazione ε, $=$, ecc.:

4. $-(x \varepsilon s). =. x - \varepsilon s$
5. $-(x = y). =. x -= y.$

Essendo a, b proposizioni, con $a \cup b$ indicheremo l'affermazione della verità di una almeno delle a e b; cioè o è vera la a, o è vera la b. L'operazione $\cup$ chiamasi anche *addizione logica*. Si ha:

6. $-(ab) = (-a) \cup (-b)$

« Negare che siano vere ad un tempo la a e la b vale affermare che o non è vera la a o non è vera la b, » ossia « la negazione d'un prodotto è la somma delle negazioni dei fattori. »

7. $-(a \cup b) = (-a)(-b)$

« Negare che una almeno delle a e b sia vera vale affermare che la a e la b sono amendue false, » ossia « la negazione d'una somma è il prodotto delle negazioni dei termini. »

Si ha:

8. $a \cup b = b \cup a$; $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c = a \cup b \cup c$; $a \cup a = a$,

le quali formole esprimono le proprietà commutativa e associativa dell'addizione logica, analoghe a quelle viste al § 1.

9. $a(b \cup c) = ab \cup ac$,

che esprime la proprietà distributiva della moltiplicazione logica rispetto all'addizione, analoga alla algebrica $a(b + c) = ab + ac$.

Esempi. Si ha:

$$x, y \varepsilon \mathrm{q}. \supset .\because. xy = 0. =: x = 0. \cup. y = 0$$

relazioni, e introdurremo dei segni per rappresentare le classi che più spesso si presentano. Scriveremo:

N al posto di « numero intero positivo »
n » « numero intero »
R » « numero razionale positivo »
r » « numero razionale »
Q » « numero reale positivo » o « quantità positiva »
q » « numero o quantità reale, » che diremo *numero* senz'altro.

Il vantaggio di questi simboli non sta solo nella brevità, ma anche nel loro significato esatto, e nel poterli introdurre nelle formole. Si ha:

1. $a, b \varepsilon \mathrm{q}. \supset. a + b \varepsilon \mathrm{q}.$

« Se a e b sono due quantità, anche $a+b$ è una quantità determinata. »

2. $a, b \varepsilon \mathrm{q}. b \gtrless 0 : \supset. \frac{a}{b} \varepsilon \mathrm{q}.$

« Essendo a e b due quantità, di cui la seconda non nulla, $\frac{a}{b}$ rappresenta una quantità determinata e finita. »

3. $a, b \varepsilon \mathrm{q}. \supset. a \times b = b \times a.$

« Indicando con a, b due numeri, si ha ecc. »

4. $m, n \varepsilon \mathrm{N}. a \varepsilon \mathrm{q} : \supset. a^{m+n} = a^m a^n$

« Chiamando m ed n due numeri interi e positivi, ed a un numero reale, si ha ecc. »

5. $m, n \varepsilon \mathrm{q}. a \varepsilon \mathrm{Q} : \supset. a^{m+n} = a^m a^n$

« Essendo m ed n due numeri reali, ed a un numero positivo, si ha ecc. »

In modo analogo si enunciano tutte le identità dell'algebra.

6. $a, b, c \varepsilon \mathrm{q}. a < b : \supset. a + c < b + c$

7. $m, n \varepsilon \mathrm{Q}. m < n : \supset. \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Analogamente si enunciano le deduzioni da una relazione ad un'altra.

8. $a, b, x, y \varepsilon \mathrm{q}. \supset\therefore x + y = a. x - y = b : =: 2x = a + b. 2y = a - b$

« Essendo a, b, x, y dei numeri, il sistema di equazioni

$$x + y = a \quad \text{e} \quad x - y = b$$

è equivalente al sistema

$$2x = a + b, \quad 2y = a - b. »$$

9. $x, y \varepsilon \mathrm{q}. \supset \therefore x^2 + y^2 = 0. =: x = 0. y = 0$

« Essendo x, y dei numeri (reali), $x^2 + y^2$ è nullo quando e solo quando si annullano ad un tempo x e y. »

In modo analogo si esprimono le relazioni fra equazioni e proposizioni.

§ 4. — *Segni* $-$, $\smile$, Λ (9).

Essendo a una proposizione, con $-a$ intendiamo la negazione della a. Se a, b, c, rappresentano proposizioni, si ha:

1. $-(-a) = a$ « Due negazioni fanno una affermazione. »
2. $a = b. =. -a = -b$
3. $a \supset b. =. -b \supset -a$

« La proposizione: da a si deduce b, è equivalente alla: da non b si deduce non a. »

Per comodità di scrittura alcuna volta invece di scrivere il segno $-$ davanti a tutta la proposizione, lo scriveremo davanti al segno di relazione ε, $=$, ecc.:

4. $-(x \varepsilon s). =. x - \varepsilon s$
5. $-(x = y). =. x - = y.$

Essendo a, b proposizioni, con $a \smile b$ indicheremo l'affermazione della verità di una almeno delle a e b; cioè o è vera la a, o è vera la b. L'operazione $\smile$ chiamasi anche *addizione logica*. Si ha:

6. $-(ab) = (-a) \smile (-b)$

« Negare che siano vere ad un tempo la a e la b vale affermare che o non è vera la a o non è vera la b, » ossia « la negazione d'un prodotto è la somma delle negazioni dei fattori. »

7. $-(a \smile b) = (-a)(-b)$

« Negare che una almeno delle a e b sia vera vale affermare che la a e la b sono amendue false, » ossia « la negazione d'una somma è il prodotto delle negazioni dei termini. »

Si ha:

8. $a \smile b = b \smile a$; $a \smile (b \smile c) = (a \smile b) \smile c = a \smile b \smile c$; $a \smile a = a$,

le quali formole esprimono le proprietà commutativa e associativa dell'addizione logica, analoghe a quelle viste al § 1.

9. $a(b \smile c) = ab \smile ac$,

che esprime la proprietà distributiva della moltiplicazione logica rispetto all'addizione, analoga alla algebrica $a(b + c) = ab + ac$.

Esempi. Si ha:

$$x, y \varepsilon \mathrm{q}. \supset \therefore xy = 0. =: x = 0. \smile. y = 0$$

« Essendo x ed y due numeri, dire che il loro prodotto è nullo, significa dire che si annulla uno dei fattori. » Prendendo le negative d'ambo i membri dell'eguaglianza che sta alla tesi, secondo le regole 2 e 7, essa si può pure scrivere:

$$x, y \varepsilon \mathrm{q}. \supset .\cdot. xy - = 0. = : x - = 0. y - = 0$$

« Se il prodotto di due numeri non è nullo, essi sono amendue diversi da zero, e viceversa. »

Useremo infine il segno Λ per indicare l'*assurdo*. Quindi $ab = \Lambda$, dice che le proposizioni a e b sono contradditorie. Si ha:

10. $a - a = \Lambda$; $a \Lambda = \Lambda$; $a \cup \Lambda = a$

« Affermare e negare una stessa proposizione è un assurdo; » « se in un sistema di equazioni alcune sono contradditorie, il sistema è assurdo... » Si noti l'analogia fra l'Λ e lo 0, i quali sono i *moduli* delle addizioni logica e algebrica.

11. $a \supset b. =. a - b = \Lambda$

« Invece di dire che da a si deduce b, si può dire che l'asserzione di a e la negazione di b è un assurdo. » Quindi in ogni deduzione $a \supset b$ si può trasportare il secondo membro b nel primo, facendolo precedere dal segno $-$, e scrivendo nel secondo Λ; e viceversa. Così per esempio, la proposizione 9 del § 1:

$$a = b. b = c : \supset. a = c$$

si può pure scrivere, trasportando l'$a = c$ nel primo membro:

$$a = b. b = c. a - = c : = \Lambda$$

« il sistema delle proposizioni a è eguale a b, b è eguale a c, e a non è eguale a c, è assurdo; » e trasportando la $b = c$ nel secondo membro, essa si potrà ridurre alla forma:

$$a = b. a - = c : \supset. b - = c.$$

Risulta di qui che si potrebbe fare a meno del segno $\supset$, riducendo sempre il secondo membro all'Λ. Noi però lo conserviamo per maggior varietà, e per analogia colla forma comune di esprimere il pensiero.

Se $a, b,...$ rappresentano classi, ai segni $-$, $\cup$, Λ attribuiremo i significati seguenti:

$-a$ = « i non a »
$a \cup b$ = « l'insieme degli individui che sono o a o b. »
Λ = « nulla. » Quindi $a \cap b = \Lambda$ significa: « nessun a è b. »

Quindi il segno Λ si leggerà *assurdo* o *nulla*, secondochè si tratti di proposizioni o di classi; nei due casi esso ha le stesse proprietà, come il segno $\supset$.

Riguardo al segno di deduzione ($\supset$) fra due proposizioni, noteremo ancora quanto segue. Quando a e b sono proposizioni contenenti delle lettere variabili x, y,... con $a \supset b$ intendiamo che, « qualunque si siano x, y,... purchè soddisfino alla a, sarà vera la b. » Così la

$$x, y \varepsilon \mathrm{Q}.\ x -= y : \supset.\ x + y > 2\sqrt{xy}$$

significa che: « qualunque si siano le due quantità positive x e y, purchè non eguali, sarà ecc. » Ma alcune volte si vuol affermare la deduzione solo rispetto una o alcune delle lettere variabili; per indicare questo, scriveremo come indice al segno $\supset$ le lettere rispetto a cui si fa la deduzione. Così, essendo a e b delle proposizioni contenenti la lettera x, oltre ad altre lettere, la scrittura $a \supset_x b$ significa « qualunque si sia x, da a si deduce b. » Questa proposizione cessa allora di essere una proposizione assoluta, ma è una condizione fra le lettere rimanenti. Così si ha:

$$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{q} : x \,\varepsilon\, \mathrm{q}.\ \supset_x.\ ax^2 + bx + c = 0 .\!\cdot\!.\ \supset : a = 0.\ b = 0.\ c = 0$$

Se a, b, c sono tre numeri, e se qualunque si sia il numero x, si ha $ax^2 + \ldots = 0$, i tre numeri dati sono nulli. »

Analogamente $a =_x b$ indica che, qualunque si sia x, le proposizioni a e b sono equivalenti, ossia che $a \supset_x b.\ b \supset_x a$.

$a =_x \Lambda$ significa « qualunque si sia il valore di x, la a è assurda » ossia « non esistono degli x che soddisfino alla condizione a. »

$a -=_x \Lambda$ significa « esistono degli x che soddisfano alla condizione a. »

Conclusione.

I segni:

ε (*è*), $=$ (*è eguale*), $\supset$ (*si deduce, o è contenuto*), $\frown$ (*e*, in generale sottinteso), $\smile$ (*o*), $-$ (*non*), Λ (*assurdo o nulla*)

permettono di esprimere qualunque relazione logica.

Conviene dare un nome a quei segni, e si possono denominare come si è scritto loro accanto entro parentesi. Però questi nomi, presi dal linguaggio comune, li rappresentano solo approssimativamente; poichè i segni hanno sempre lo stesso significato, mentrechè le parole ne hanno parecchi. Per tradurre in simboli una proposizione ordinaria, occorre analizzarla, vedere il significato che vi hanno le varie parole, e rappresentare questi significati coi simboli equivalenti; si errerebbe assai se si sostituissero senz'altro i simboli ε, $\frown$, $\smile$,... al posto delle parole *è*, *e*, *o*,...

Nelle pagine precedenti furono enunciate alcune proprietà di questi simboli. Ma ne sussistono altre moltissime; è a notarsi il *principio di*

dualità, per cui da ogni identità logica si passa ad un'altra scambiando i segni $\frown$ ed $\smile$; e ricorderò solo che già il Boole riuscì a risolvere ogni sistema di equazioni contenenti una o più classi incognite, legate a classi note colle operazioni $\frown$, $\smile$, $-$, ripetute un numero arbitrario di volte.

NOTE

(1) Leibniz si occupò a più riprese di questa questione. Ecco alcune frasi della *Dissertatio de Arte combinatoria*, Lipsiae, 1666, N. 90: « Verum constitutis tabulis vel praedicamentis artis nostrae complicatoriae majora emergunt. Nam termini primi, ex quorum complexu omnes alii constituuntur signentur notis, hae notae erunt quasi alphabetum..... Ea si recte constituta fuerint et ingeniose, scriptura haec universalis aeque erit facilis quam communis, et quae possit sine omni lexico legi, simulque imbibetur omnium rerum fundamentalis cognitio. »

(2) L'opera principale del Boole ha per titolo: *An investigation of the laws of thought*, London 1854, p. 424. Questo libro, raro in Italia, trovasi nella biblioteca V. E. di Roma.

L'ultimo lavoro dello Schröder è l'*Algebra der Logik*, Leipzig 1890, di cui comparve il 1° volume di 720 pagine. Io rimando a quest'opera per le numerosissime citazioni, limitandomi, pel lettore italiano, a menzionare il mio

Calcolo geometrico, preceduto dalle operazioni della Logica deduttiva, Torino 1888,

e la pregevole Memoria:

Nagy, *Fondamenti del Calcolo Logico*, Giorn. di Matemat., t. XXVIII.

(3) L'analogia fra il calcolo della logica e quello dei quaternioni sta in questo che i simboli dell'una e dell'altra scienza soddisfano a leggi speciali, analoghe, benchè non identiche, a quelle dell'algebra ordinaria.

Credo opportuno riferire le parole del Tait (*Quaternious*, I, traduit par Plarr, Paris 1882, p. 81):

« Les propriétés des symboles qui se rapportent aux quaternions nous rappellent les symboles électifs de la logique, tels qu'ils sont donnés dans le Traité admirable de Boole: *On the laws of thought*. La similitude frappante de ces deux systèmes de symboles, types de procédés qui sont au fond les mêmes, nous suggère la remarque qu'après tout il n'y a qu'une science unique dans l'Analyse mathématique, ayant diverses branches, mais employant dans chacune d'elles les mêmes procédés. Par l'une de ses branches, cette science nous dévoile les mystères de la Géométrie de position, hors de la portée du raisonnement géométrique ordinaire; par l'autre, elle permet au logicien d'arriver à des vérités de déduction auxquelles il n'aurait jamais pu atteindre sans le secours de l'instrument des formules. »

(4) Pervenni a questo risultato nel mio opuscolo:

Arithmetices principia, nova methodo exposita, Torino 1889.

Continuai l'applicazione di questi metodi nelle Note:

I principii di Geometria, logicamente esposti, Torino 1889.

Les propositions du cinquième livre d'Euclide, réduites en formules (Mathesis, t. X).

Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires (Mathematische Annalen, t. XXXVII).

Risulta così che la questione proposta da Leibniz è completamente, se non ancora perfettamente, risolta; o per servirmi delle parole dello Schröder (*Ib.*, p. 710): « Es ist höchst frappant... eine riesige Menge von geometrischen Sätzen mitsamt deren Beweisen... *lediglich in der Zeichensprache* dargestellt zu erblicken... Es erhellt aus ihren Anblick, dass das... Ideal der Pasigraphie für die Zweche der Wissenschaft bereits in ganz erheblichem Umfange *verwirklicht ist.* »

(5) Per indicare che la proposizione b è conseguenza della a si potrebbe scrivere « b c a, » ove il segno c è l'iniziale della parola *conseguenza*. E si può poi convenire di indicare la stessa relazione scambiando i due membri, e invertendo il segno c, analogamente a quanto si fa dei segni $>$ e $<$; sicchè la stessa proposizione si potrà scrivere « a ɔ b » che significa sempre « b è conseguenza di a » ossia « a ha per conseguenza b, » ovvero « da a si deduce b. »

Al segno di deduzione si diedero forme diversissime.

Molti Autori inglesi scrivono $\therefore$.

C. S. Peirce (*On the Algebra of Logic*, American Journal of Mathematics, III, p. 15) scrive $-\!\!<$.

Schröder (Op. cit.) adopera un segno derivato dai due $=$ e $<$.

Mc Coll (*The Calculus of Equivalent Statements*, Proceedings of the London mathematical Society, vol. X, p. 16) scrive $a : b$.

Frege (*Begriffsschrift*, Halle a. S. 1879) invece di a ɔ b scrive $\begin{array}{l}\vdash\!\!\!\top\!\!-\, b\\ \quad\llcorner\!-\, a.\end{array}$

Alcuni Autori non introdussero alcun segno per la deduzione, potendosi essa anche esprimere coi segni successivi.

(6) La legge rappresentata da questa formola fu dal Jevons (*The principles of science*, London 1883) chiamata *the law of simplicity*.

(7) Così già si scrive $d.uv$ e $du.v$ al posto di $d(uv)$ e $(du)v$. Questa punteggiatura presenta qualche analogia colle notazioni proposte da Leibniz (*Math. Schriften*, III, p. 276, e VII, p. 55).

(8) Il segno ε è l'iniziale di ἐστί.

(9) Il segno di negazione $-$, nella forma qui usata, è in sostanza dovuta a Boole.

Invece di $-a$, lo Schröder (*ib.*) scrive $a_{,}$; Jevons (*ib.*) scrive A; McColl (*ib.*) a'.

Invece di $a \cup b$ si scrisse da Leibniz a u b (ove u è l'iniziale di *uel*), da Jevons $a.|.b$, e dal maggior numero di Autori $a + b$.

Il Dedekind (*Was sind und was solien die Zahlen*, 1888) invece di

$a \frown b$ e $a \smile b$ scrive G(a, b) e M(a, b), notazioni poco differenti da quelle già usate dal CANTOR nei suoi studii sulle *Mannichfaltigkeiten* (Math. Ann. t. XV e seguenti).

Si potrebbe usare il segno v, iniziale di *vero*, per indicare una proposizione identicamente vera, e, trattandosi di classi, per indicare la classe *tutto*. Questo segno fu usato dal Peirce (*ib.*); esso è il *modulo* della moltiplicazione logica. Per indicare l'assurdo, o il nulla, useremo il segno Λ, cioè la lettera precedente rovesciata. Non introdurremo il segno v, che corrisponde per dualità a Λ, perchè non ne abbiamo bisogno.

Invece dei segni Λ e v, la maggior parte degli Autori scrivono 0 e 1, o segni derivati. Però è cosa utile ben distinguere i moduli delle operazioni algebriche da quelli delle operazioni logiche.

Sommario dei Libri VII, VIII e IX di Euclide.

I libri degli *Elementi d'Euclide* che trattano di geometria furono tradotti ad uso scolastico. Sono invece meno noti i libri VII, VIII e IX che si riferiscono all'aritmetica, e il libro X che tratta degli irrazionali. E siccome la lettura di questi libri presenta qualche difficoltà, parmi utile il tradurre i principali risultati ivi contenuti in linguaggio algebrico, in guisa che chiunque si possa fare facilmente un'idea esatta dello stato della scienza in quei tempi.

Libro VII.

In quanto segue $a, b, \ldots e, f$ rappresentano dei numeri interi positivi (N).

Scriveremo mcd al posto di « massimo comun divisore. »

$a < b . \supset . \text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a, b - a).$ {Prop. 1 e 2}

Scriveremo $a \times$ N al posto di « multiplo di a. »

$b \varepsilon a \times \text{N} . \supset . \text{mcd}(a, b) = a$ {Prop. 1 e 2}

$b, c \varepsilon a \times \text{N} . \supset . \text{mcd}(b, c) \varepsilon a \times \text{N}.$ {Coroll. Prop. 2}

$\text{mcd}(a, b, c) = \text{mcd}[a, \text{mcd}(b, c)]$ {Prop. 3}

Scriveremo a/b per indicare il quoziente o rapporto dei due numeri.

$a/b = c/d . = . a/b = (a + c)/(b + d)$ {Prop. 5, 6, 7, 8, 11, 12}

$a/b = c/d . = . a/c = b/d$ {Prop. 9, 10, 13, 15}

$a/b = d/e . b/c = e/f : \supset . a/c = d/f$ {Prop. 14}

$a \times b = b \times a$ {Prop. 16}

$(ac)/(bc) = a/b$ {Prop. 17 e 18}

$a/b = c/d . = . ad = bc$ {Prop. 19}

Scriveremo $a \pi b$ invece di « a è primo con b. »

$a/b = c/d .\ a \pi b : \supset .\ c \varepsilon a \times N$ {Prop. 20 e 21}

$a, b \varepsilon N .\therefore x, y \varepsilon N .\ a/b = x/y .\ x < a : =_{x,y} \Lambda :: \supset .\ a \pi b$

{Prop. 22}

$ab \pi c . = : a \pi c .\ b \pi c$ {Prop. 23, 24}

$a \pi b . \supset .\ a^2 \pi b$ {Prop. 25}

$a \pi c .\ a \pi d .\ b \pi c .\ b \pi d : \supset .\ ab \pi cd$ {Prop. 26}

$a \pi b . = .\ a^2 \pi b^2$ {Prop. 27}

$a \pi b . = .\ a + b \pi b$ {Prop. 28}

Scriveremo Np al posto di « numero primo. »

$a \varepsilon \mathrm{Np} .\ b - \varepsilon a \times N : \supset .\ a \pi b$ {Prop. 29}

$a \varepsilon \mathrm{Np} .\ bc \varepsilon a \times N : \supset : b \varepsilon a \times N . \cup .\ c \varepsilon a \times N$ {Prop. 30}

$a \varepsilon N . \supset .\therefore x \varepsilon \mathrm{Np} .\ a \varepsilon x \times N : - =_x \Lambda$ {Prop. 31 e 32}

$a/d = b/e = c/f .\ \mathrm{mcd}(a, b, c) = 1 : \supset .\ d \varepsilon a \times N$ {Prop. 33}

Scriveremo mcm al posto di « minimo comune multiplo. »

$\mathrm{mcm}(a, b) = (a \times b) / \mathrm{mcd}(a, b)$ {Prop. 34}

$a \varepsilon b \times N .\ a \varepsilon c \times N : \supset .\ a \varepsilon [\mathrm{mcm}(b, c)] \times N$ {Prop. 35}

$\mathrm{mcm}(a, b, c) = \mathrm{mcm}[a, \mathrm{mcm}(b, c)]$ {Prop. 36, 37}

Libri VIII e IX

In questi libri si trattano le proprietà delle progressioni geometriche. Trasformate in simboli algebrici, esse si riducono alle propietà delle potenze:

$(ab)^m = a^m b^m$ {Libro VIII, prop. 11, 12; IX, prop. 4}

$(a/b)^m = a^m / b^m$ {VIII, 11, 12; IX, 5}

$(a^m)^n = a^{mn}$ {VIII, 13; IX, 3 e 9}

$a^{m+n} = a^m a^n$ {IX, 11}

Sono ancora a notarsi le proposizioni seguenti:

$a \pi b . \supset .\ a^n \pi b^n$ {VIII, 2, 3}

$b^n \varepsilon a^n \times N . \supset .\ b \varepsilon a \times N$ {VIII, 6, 7, 14-17, 22-25}

$a \varepsilon \mathrm{Np} .\ b^n \varepsilon a \times N : \supset .\ b \varepsilon a \times N$ {IX, 12}

Scrivendo a^N invece di « potenza di a » si ha:

$a \varepsilon \mathrm{Np} .\ a^n \varepsilon b \times N : \supset .\ b \varepsilon a^N$ {IX, 13}

$a, b, c, d \varepsilon \mathrm{Np} .\ bcd \varepsilon a \times N : \supset : a = b . \cup .\ a = c . \cup .\ a = d$

{IX, 14}

$a \pi b . \supset : a^2 + ab \pi b^2 . a^2 + b^2 \pi ab$ {IX, 15}

Il numero dei numeri primi è infinito. {IX, 20}

La prop. 35 del libro IX dà la somma dei termini d'una progressione geometrica.

Chiamando τέλειος (perfetto) un numero quando eguaglia la somma dei suoi divisori, l'unità compresa ed esso eccettuato, si ha:

$2^{n+1} - 1 \varepsilon \mathrm{Np} . \supset . 2^n (2^{n+1} - 1) \varepsilon (\tau\acute{\varepsilon}\lambda\varepsilon\iota o\varsigma)$. {IX, 36}

(P.)

Sulla definizione della velocità di un punto.

Nota del Prof. E. Novarese *della R. Accademia Militare.*

Tutti, o quasi, i trattati di Meccanica definiscono dapprima la velocità di un punto (geometrico) in movimento come un numero: il numero $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ se il moto è equabile, il numero $\lim \frac{\Delta s}{\Delta t}$ se il moto è vario, s essendo il numero che misura lo spazio corrispondente al tempo t (*).

In seguito, alcuni Autori *convengono* di *rappresentare* la velocità con un segmento (*Strecke, vettore*). Per es.:

Resal (*Cinématique pure*, p. 10): « Nous représenterons graphiquement la vitesse d'un point mobile par une longueur proportionnelle à cette vitesse portée dans le sens du mouvement sur la tangente à la trajectoire. »

Somoff (*Kinematik*, p. 5): « Wir werden *die* Geschwindigkeit durch die Strecke MT darstellen, die auf der Tangente der Bahn im Punkte M aufgetragen wird ecc. »

Questo linguaggio lascia supporre che, per tali Autori, il segmento rappresentativo accennato non sia già la velocità, ma un altro ente che indica insieme e la velocità e la direzione e il verso del moto. (In

---

(*) A dir vero, molti libri presentano questa definizione sotto un aspetto alquanto diverso: quando il moto è equabile, chiamano velocità *lo spazio descritto nell'unità di tempo;* quando il moto è vario, chiamano velocità in un determinato istante *lo spazio che il mobile descriverebbe nell'unità di tempo* qualora il moto, a far capo da quell'istante, diventasse equabile. Ma crediamo che con tale linguaggio si voglia dire *il numero che misura lo spazio descritto nell'unità di tempo:* se si dovesse intendere letteralmente ciò che suonano le parole, la definizione ci parrebbe addirittura da respingere (almeno pel moto curvilineo), poichè la velocità così definita sarebbe un arco di linea del quale sarebbe individuata la sola lunghezza.

quella guisa appunto che, se si rappresenta il numero velocità angolare di un moto rotatorio mediante un segmento sull'asse della rotazione, questo segmento indica insieme e la velocità angolare e l'asse e il verso della rotazione).

Altri Autori invece allargano il significato anteriormente attribuito al vocabolo *velocità*, considerando questa come un segmento del quale prima hanno definito soltanto il valore. Per es.:

Tait e Steele (*Dynamics of a particle,* 5ª ed., pp. 3-4): « So far as we have yet spoken of it, velocity has been regarded merely as *speed*... In fact velocity is properly a *directed magnitude* (or *vector*, as it is now called) involving at once the direction and the speed of the motion. »

E lo Schell (*Theorie der Beweg. u. der Kräfte,* 2ª ed., p. 191 del vol. I), forse meno nettamente: « Bisher war nur von der Grösse der Geschwindigkeit die Rede; man spricht aber auch von ihrer Richtung »; e, definita questa direzione, parla più innanzi « von den beiden die Geschwindigkeit bestimmenden Merkmalen, Grösse und Richtung. »

Il prof. Padelletti nella sua pregevole Memoria *Sulle relazioni tra Cinematica e Meccanica* (Giorn. di Matem., vol. XIV), dopo aver denominato velocità del moto uniforme il coefficiente di t nell'espressione dello spazio, definisce la velocità di un moto qualunque come una derivata geometrica.

Altri scrittori infine, dopo aver definito la velocità come un numero, parlano senz'altro della direzione o del verso di essa, mentre la loro definizione (se non si aggiungono dichiarazioni ulteriori) esclude che l'ente velocità abbia una direzione od un verso. Così ad es. il Gilbert, nel suo *Cours de Mécan. analyt.* meritamente pregiato, chiama velocità il limite del rapporto $\frac{\text{arco MM}'}{\Delta t}$; e poi, dopo aver osservato che, nel moto rettilineo, « la direction du mouvement du point à un instant quelconque est bien déterminée, » dice: « Mais dans le mouvement curviligne, il faut définir la direction de la vitesse » (2ª ed., pp. 7 e 9). Il qual linguaggio implica, mi pare, 1° che la velocità sia un ente fornito di direzione; 2° che questa direzione sia la stessa cosa che la direzione del moto.

Similmente il Rausenberger (*Lehrbuch der Analyt. Mechanik*, Leipzig 1888, I Bd., p. 4), posto per definizione velocità $= \frac{ds}{dt}$, dice: « Der Geschwindigkeit kommt in jedem Punkte der Bahn eine bestimmte *Richtung* zu, nämlich die der Tangente der Bahnkurve in dem fraglichen Punkte, ecc. »

Le osservazioni che siam venuti esponendo riguardano esclusiva-

mente la Cinematica: non mancano nuove incertezze se il punto mobile si considera come materiale. Ci contentiamo a questo riguardo di recare un passo del *Traité de Mécanique* del Poisson. L'A., dopo aver detto che lo spazio costante descritto nell'unità di tempo, in un moto uniforme, è ciò che si chiama la velocità del mobile, scrive:

« Mais, pour parler exactement, cet espace n'est que la mesure de la vitesse, et non pas la vitesse elle-même. La vitesse d'un point matériel en mouvement est une chose qui réside dans ce point, dont il est animé, qui le distingue actuellement d'un point matériel en repos et n'est pas susceptible d'une autre définition » (2ª ed., tomo I, p. 207).

Concludendo, domandiamo: La velocità di un punto mobile è un numero od è un segmento? O, a dir meglio, è preferibile, in Cinematica, definirla come un numero o come un segmento? E, in Meccanica, è dessa da considerarsi nè più nè meno che in Cinematica, ovvero come qualche cosa di connesso colle proprietà che si attribuiscono al punto materiale? (*)

RECENSIONI

Dott. Giuseppe Testi. — **Elementi di Geometria.** — *Ad uso degli alunni delle scuole secondarie inferiori.* — (Livorno 1889, Raffaele Giusti editore).

Credo opportuno riportare alcuni periodi della prefazione agli *Elementi di Geometria* del sig. Testi.

« L'esperienza mia e il fatto che molti libri di geometria per le scuole tecniche, redatti col metodo così detto intuitivo, o hanno avuto corta vita o ben poca fortuna, per quanto alcuni di essi sieno per molti aspetti pregevolissimi, mi hanno consigliato di tornare all'antico e di abbandonare addirittura i piccoli artifizi dei cartoncini intagliati e dei biglietti da visita sovrapposti.

« Questo trattatello ha veste più seria, ma non credo che per questo voglia riuscire ai giovani di maggior difficoltà, completato che sia convenientemente dalla lezione orale..... »

Aggiunge poi che molte volte gli è accaduto (nel suo insegnamento, non nel libro) di ricorrere a paragoni proprii della geometria intuitiva « ma al

(*) La *Rivista di Matematica* accoglierà con piacere le comunicazioni che si vorranno inviarle in risposta a questi quesiti.

N. della R.

solo scopo di rendere *accessibile* ai giovani la dimostrazione *non per sostituirla.* »

« I concetti geometrici, si parli pure a ragazzi, dal momento che loro s'insegna la geometria, non devono essere travisati, e il libro si deve sforzare di riassumerli nella loro purezza. »

Dopo aver fatto osservare che i postulati ammessi non sono tutti quelli necessari e sufficienti per porre le basi della geometria, aggiunge che ha creduto bene di limitarsi ai principali per non rendere il libro troppo difficile ai giovinetti delle scuole secondarie inferiori. Poi: « Ciò che è inteteressante di fissare è il metodo, tenuto conto specialmente del fatto che la metà e più dei giovani che frequentano il corso di geometria è destinata a passare a studi superiori. »

Queste le ottime basi pedagogiche del libro del sig. Testi, che dalle altre geometrie elementari per le scuole secondarie inferiori, si allontana più di quello che l'A., troppo cortesemente, dica. La Geometria intuitiva propriamente detta bisogna bene insegnarla, servendosi di modelli, nelle scuole elementari, e non può recar danno all'insegnamento se le definizioni e i pochi concetti geometrici che è necessario introdurre sono date rigorosamente: nelle scuole secondarie inferiori non è più adatta la geometria intuitiva propriamente detta, ma i libri che si adoperano ordinariamente non sono fatti col metodo intuitivo; troppo superbi per presentarsi in veste di *empirici* (quali sono realmente nel significato più brutto della parola) si camuffano da scienziati dando dimostrazioni (?!) intuitive che, il più delle volte, fanno a pugni non solo colla scienza, ma anche col senso comune. Rimarrebbe a sapersi se gli autori di questi libercoli scrivono così per principî pedagogici sbagliati o per deficienza di coltura matematica.

Qualunque sia la risposta alla domanda, sta il fatto che il libro del sig. Testi è buono, molto buono, l'unico che io conosca, veramente adatto per le scuole secondarie inferiori. Con esso non vi è pericolo di dare ai giovani cognizioni inesatte, le quali, coloro che continuano gli studii, sradicano poi con difficoltà dalla loro mente; di più la disposizione delle parti del libro è tale da permettere all'insegnante di trattare sin da principio quelle cose che sono maggiormente utili nella pratica, cosa a cui si deve sempre por mente nelle scuole secondarie inferiori, che, per quanto male ordinate, sono fine a loro stesse.

Non mancano qua e là alcune piccole inesattezze; ma quale è l'opera umana che sia perfetta? E del resto la maggior parte di queste inesattezze riguardano più la forma che la parte scientifica e in una prima edizione sono inevitabili.

Avendo indicato in generale i pregi del lavoro e l'opportunità di esso nell'insegnamento, e indicato esistere alcune mende, voglio ora parlare particolarmente di queste e di quelli.

Nelle nozioni preliminari, dopo aver dato le definizioni di corpo, superficie, linea e punto, aggiunge, poco opportunamente, il concetto di dimensione. Dico poco opportunamente. Difatti le denominazioni di *lunghezza*, *larghezza*, *altezza*, che si usano nel linguaggio comune, perdono il loro

significato quando si applicano a solidi diversi dal parallelepipedo; il concetto di *dimensione* nel senso della geometria superiore è impossibile darlo negli elementi e del resto non ha il medesimo significato che ha nel linguaggio comune. L'A. poi per introdurre il concetto di *estensione* osserva che una linea, una superficie, un solido ha due *lati* rispetto ad un punto, una linea, una superficie ad esse appartenenti, e che *quindi* la linea ha una dimensione, la superficie due, il solido tre. Perchè?

Sempre nelle nozioni preliminari dà i postulati relativi ai movimenti delle figure, postulati che i trattatelli ordinari non pensano mai di mettere come se le dimostrazioni fondamentali (è vero che non le danno!) non fossero basate su tali movimenti. La retta ed il piano sono pure dati per mezzo di postulati.

Nel N° 15 (pag. 9, nozioni preliminari) enumerando alcuni assiomi relativi alle grandezze (geometriche) parla di prodotto e quoziente di una grandezza per un'altra. La parola *prodotto*, presa nel senso che ad essa si dà in aritmetica, non ha valore portata nelle grandezze (geometriche o no), e l'A. stesso mostra di esser convinto di ciò quando (pag. 87) dando la regola per trovare l'area del rettangolo aggiunge che: « Essa (regola) di solito si enuncia dicendo, con frase poco felice, che *l'area del rettangolo si ottiene moltiplicando la base per l'altezza.* »

Date nel Cap. II le principali proprietà del circolo, alcune delle quali dice esser dimostrabili, ma che non dimostra per non far precedere parti meno utili nella pratica, passa alla risoluzione *grafica* dei principali problemi elementari, dando la dimostrazione di ogni costruzione. Questo, che per un trattato scientifico sarebbe un inconveniente, per un trattato pratico-razionale è un pregio grandissimo, sia dal punto di vista didattico, sia dal fatto che nelle scuole secondarie l'insegnamento pratico del disegno precede quello pratico-razionale della geometria e che molte volte è dalle scuole di disegno che gli alunni apprendono le definizioni le più barocche. A proposito delle dimostrazioni delle costruzioni elementari, trovo che si potrebbero fare quasi tutte più rapidamente, e quindi in modo più chiaro, introducendo il luogo geometrico dei punti del piano equidistante da due punti dati.

Date nel Cap. IV le regole (dimostrate per i numeri commensurabili) per trovare le aree delle principali figure piane, passa all'equivalenza dei poligoni, chiamando equivalenti due poligoni che hanno la medesima area. In questo modo semplifica la trattazione teorica dell'equivalenza che non sarebbe possibile sviluppare direttamenti in un corso di scuola secondaria inferiore, senza lasciare lacune sensibili.

Nel Cap. VI, a pag. 126, chiama *iscritto* l'angolo formato da due corde che si *toccano* sulla circonferenza e della medesima denominazione si serve nell'enunciato del teorema che dà la proprietà dell'angolo formata da una tangente alla circonferenza e dalla corda che passa per il punto di contatto. Tale denominazione è evidentemente impropria.

(*Continua*).

Nel medesimo Cap., al § 3°, *Segmenti proporzionali nel circolo,* mi pare si potrebbe più opportunamente sostituire il teorema generale che dà la proprietà dei rettangoli formati con le coppie di segmenti determinati da un circolo fisso nelle rette che escono da un punto, pure fisso, interno od esterno al circolo, e dedurre da questo la proprietà della tangente, dell'altezza e cateto di un triangolo rettangolo, proprietà che servono per la costruzione della media proporzionale tra due segmenti. Dico più opportunamente perchè il concetto di proporzionalità diretta o inversa è sempre un po' difficile per i giovinetti e perchè in questo modo da un sol teorema si possono dedurre tanti teoremi utili nella pratica.

Nella seconda parte (*Geometria solida*) ho da osservare con piacere che manca il solito teorema, sempre presente in tutti quei libercoletti dei quali ho già parlato, *due rette parallele individuano un piano!* È vero che a molti questo può parere un teorema, perchè definendo le rette parallele, dimenticano la condizione che *appartengano al medesimo piano!* I teoremi dati in questa seconda parte sono quelli soltanto indispensabili a definire i principali solidi e le loro proprietà, e tutto disposto in ordine logico e in modo che l'alunno li apprende facilmente.

Riepilogando: le mende sono poche e poco significanti, i pregi molti e il libro del sig. Testi può essere consigliato a tutti i professori delle scuole secondarie che amano lasciare ai loro autori i libri empirici. Non si creda che io disprezzi così in massa *tutte* le geometrie per le scuole secondarie; parlo di alcune (troppe disgraziatamente!) che non sono neanche degne della critica, sia per quello che contengono, sia perchè chi scrive un libro di testo deve fare qualche cosa che non esista ancora e di cui si senta il bisogno, e quei tali libercoletti si somigliano tutti nella forma, negli spropositi e nello scopo. Il sig. Testi ha invece fatto un libro diverso dagli altri, vi ha messo un concetto pedagogico esatto, e ha tenuto conto dei lavori veramente scientifici fatti per altri rami di studi, e ha dotato l'insegnamento secondario inferiore di un libro di cui il bisogno era sentito dai buoni insegnanti, di un libro che spero vedere privo delle poche e piccole mende in future edizioni.

C. Burali.

E. W. Hyde — *The directional Calculus, based upon the methods of H. Grassmann.* — Boston, Ginn & Comp. 1890.

Quest'opera, che rappresenta il lavoro di otto o nove anni di studio e di esperienza dell'A. nell'insegnamento all'Università (di Cincinnati), è destinata come libro di testo per spiegare nei Collegi e nelle Università « the wonderful and comprehensive system » di H. Grassmann.

Nei primi due capitoli l'A. sviluppa le notazioni e le teorie di Grassmann.

Il cap. 1° (di 13 pag.) tratta delle somme di punti e dei vettori. L'A. oltre alle notazioni di Grassmann (+, —, =) introduce pure quelle di

Hamilton $T\alpha$ e $U\alpha$ per indicare la grandezza del vettore α, e il vettore unità diretto secondo α.

Il cap. 2°, assai più lungo, tratta delle varie specie di moltiplicazioni fra punti e vettori; definisce le proprietà generali dei prodotti, e poi ne spiega il significato nei singoli casi. Dapprima tratta dei prodotti progressivi, cioè quello di due punti che chiama *point-vector* o *line* (linea); di due vettori, detto *plane-vector* (bivettore), e che, come è noto, corrisponde alla *coppia* della Meccanica; di tre punti, che chiama *point-plane-vector* (area triangolare); di tre vettori (trivettore), e di quattro punti (tetraedro).

E qui credo a proposito una osservazione. La nomenclatura proposta da Grassmann pei varii enti considerati nell'*Ausdehnungslehre* è assai incomoda; quella adottata dal sig. Hyde è evidentemente migliore, ma pur tuttavia è ancora lunga, ed usa termini presi dal linguaggio comune in un significato particolare; lo stesso difetto trovasi pure nella nomenclatura da me adottata in un lavoro consimile. Invece la teoria dei quaternioni uscì completa dalla vasta mente di Hamilton, anche in queste parti accessorie, avendo questi fabbricato dei nomi nuovi (vettore, tensore, scalare,...) per indicare gli enti che gli occorsero. Forse si potrebbe ovviare a questo inconveniente usando dei segni particolari per indicare le varie classi di enti che si considerano. Così si potrebbe scrivere:

p, p^2, p^3, p^4 invece delle parole *punto, prodotto di 2 punti, id. di 3, id. di 4*, e

v, v^2, v^3 invece di *vettore, prodotto di 2 vettori*, e *prodotto di 3 vettori*, e infine

F_1, F_2, F_3 e F_4 per indicare le *formazioni delle 4 specie*, (*raümlichen Grössen I, II, III und IV Stufe*). Questi segni si possono poi leggere ad arbitrio, anche adoperando in senso particolare nomi del linguaggio comune, senza ulteriore pericolo di confusione.

In seguito (cap. 2°) l'A. applica alla geometria piana il concetto di *complemento*, finora solo usato pei vettori nello spazio, col nome, in Meccanica, di *asse-momento;* e poi tratta dei prodotti regressivi nel piano e nello spazio. L'A. dà, seguendo il Ball, il nome di *screws* alle F_2. In queste pagine trovansi le principali formole di Geometria analitica sulle coordinate di punti, rette, piani, e complessi lineari.

I cap. 3° e 4°, *Geometria piana*, trattano dei luoghi geometrici e contengono la teoria generale delle sezioni coniche, sia dal lato metrico che proiettivo. Noterò il solo teorema di Pascal, il quale, ove $e_1\, e_2\, e_3\, e_4\, e_5$ e p siano 6 punti d'una conica, assume la forma

$$(pe_1 \,.\, e_3 e_4)(e_1 e_2 \,.\, e_4 e_5)(e_2 e_3 \,.\, e_5 p) = 0.$$

I cap. 5° e 6°, *Geometria solida*, contengono, fra le altre cose, la teoria delle superficie di second'ordine. È a notarsi, in questi capitoli, l'uso delle funzioni lineari φ, ψ,..... già introdotte da Hamilton, e che, col nome di *matrici*, diedero luogo a tanti studii, specialmente dei Geometri inglesi.

Nel cap. 7°, *Applicazioni alla statica*, l'A. dà le condizioni d'equilibrio d'un punto libero, o ritenuto da una linea o da una superficie; la riduzione delle forze applicate ad un corpo rigido, e i teoremi relativi.

L'esposizione chiara e semplice, i moltissimi esercizi che accompagnano le singole teorie e le numerose loro applicazioni, ci permettono di affermare che il libro risponde completamente allo scopo prefisso, cioè di trattare con forma elementare quei soli casi particolari dei metodi di Grassmann, che occorrono nelle immediate applicazioni, metodi che a causa della loro somma generalità durarono tanta fatica a diffondersi. (P.)

FRANCESCO D'ARCAIS — *Corso di Calcolo infinitesimale* — Vol. I, Padova 1891, pag. 622.

Negli ultimi decennii gli studii di illustri Matematici arrivarono a risultati che hanno scosso, per poi riedificare immediatamente su basi più solide, i principii fondamentali dell'Analisi; sicchè questa scienza al giorno d'oggi eccelle in rigore fra le altre parti della matematica. A questo rigore vanno informandosi i recenti trattati di Calcolo, anche, qualche volta, a scapito della semplicità e brevità delle dimostrazioni. L'opera del professore D'Arcais, che, come dice l'A., ha indole didattica ed elementare, raggiunge completamente il suo scopo, coll'assoluto rigore e con notevole semplicità; sicchè non dubitiamo di affermare che essa sarà una utile guida per gli studenti, e reca un vero servigio all'insegnamento.

Daremo anzitutto un sommario dell'opera. Nella parte I, già ammessa la genesi delle varie specie di numeri, si definisce il limite d'una funzione e si danno parecchi esempi in cui il limite o è finito, o è infinito, o manca; si dimostrano i teoremi sui limiti, e il principio generale di convergenza; e infine si tratta della continuità o discontinuità delle funzioni.

La parte II, *Infinitesimi*, contiene, fra altro, i due noti principii fondamentali sui rapporti e sulle somme di infinitesimi, che trovansi in pressochè tutti i trattati. Ma a questo proposito mi sia permesso di osservare che il primo, quello riferentesi al rapporto di infinitesimi, è di applicazione così ovvia, che parmi non necessario venga espressamente menzionato; il secondo poi, riguardo ai limiti di somme, è dalla massima parte dei trattati enunciato sotto forma inesatta. L'A., seguendo il Dini, introduce la *convergenza in ugual grado*, ottenendo così l'assoluto rigore; ma il principio diventa più complicato; d'altronde si può benissimo fare a meno anche di questo secondo principio.

Le parti III e IV contengono le regole di derivazione, i teoremi sulle funzioni continue e le relazioni fra funzione e derivata, i teoremi sulle derivate parziali, la teoria delle funzioni implicite, ecc.

La parte V, *Serie*, contiene i comuni criterii di convergenza, la regola di derivazione delle serie, le formule di Taylor e Mac-Laurin, e gli ordinari sviluppi in serie.

La parte VI, *Applicazioni analitiche del Calcolo differenziale*, tratta delle forme indeterminate, e dei massimi e minimi delle funzioni d'una o più variabili.

La parte VII, infine, contiene le più semplici e fondamentali applicazioni geometriche del calcolo differenziale.

Qualche punto dell'opera si presta ad osservazioni; e per quanto queste siano in questa occasione minute, ritengo cosa utile nelle recensioni il non limitarsi ad una descrizione sommaria dell'opera, ma anche l'additare quei punti, ove, si creda di poter recare qualche perfezionamento.

Alcune proposizioni dell'A. contengono condizioni restrittive sovrabbondanti.

Così nel teorema del N. 92, supposta la continuità di $f(x, y)$, si può sopprimere la condizione dell'esistenza di $\frac{\partial f}{\partial x}$;

nel teorema del N. 93 si possono sopprimere le parole « se si suppone inoltre che la $\frac{\partial f}{\partial x}$ sia continua nel punto (x_0, y_0) »;

nel teorema del N. 113 si può sopprimere la condizione « una delle quali $\frac{\partial u}{\partial x}$ sia in c continua rispetto alla variabile y, (oppure $\frac{\partial u}{\partial y}$ continua rispetto alla x) », essendo essa già contenuta nelle rimanenti;

nel teorema del N. 152 si possono sopprimere le parole « e sono continue in un intorno del punto x_0, insieme a quelle loro derivate successive che occorrerà considerare, l'ultima delle quali basta sia solo continua nel punto x_0 »;

nel teorema del N. 158 le parole: « Si supponga esistere un intorno di a, ... e $f^n(x)$ sia anche continua nel punto a »;

nei due teoremi del N. 174 si può sopprimere la continuità di $\frac{d^2y}{dx^2}$; ecc.

Queste condizioni sovrabbondanti trovansi pure nella maggior parte dei trattati, p. e. nelle lezioni litografate del prof. Dini. Naturalmente ogni Autore, senza mancare punto al rigore, può introdurre quelle condizioni superflue che più gli aggradano; ma è chiaro che se esse si possono abolire senza rendere più complicata la dimostrazione, rendendo invece più semplice l'enunciato del teorema, convenga sopprimerle. Per sopprimere alcune di quelle condizioni restrittive è però necessario modificare alquanto la dimostrazione.

Al N. 182 l'A. definisce come la maggior parte dei trattati (Serret,...) la lunghezza d'un arco; e aggiunge « riservandoci di dimostrare altrove, ed ammettendo ora, che questo limite esiste... ». Si può ovviare immediatamente a questa difficoltà ove, per lunghezza dell'arco, si definisca il limite superiore dei perimetri delle linee poligonali inscritte; e allora non si ha più a dimostrare il teorema.

Naturalmente le proposizioni dell'A. sono vere sempre, cioè senza eccezioni; non soddisfano però a questa condizione quelle dei N. 194 e 195. Ben è vero che l'A. aggiunse le parole *in generale*, e trattò lungamente dei casi di eccezione; pure, a mio modo di vedere, queste proposizioni stonano colla precisione generale del libro.

Ci arresteremo infine un istante sulla definizione del piano tangente ad

una superficie in un suo punto M. La definizione comune (Serret, ecc.) « il piano tangente è il piano che contiene le tangenti a tutte le curve che si possono tracciare, per questo punto, sulla superficie data », come è noto, lascia a desiderare. Invero, data questa definizione, dall'affermazione che il piano tangente in M ad una data superficie (p. e. ad una sfera) sia un dato piano, risulta che, tracciata sulla superficie una curva qualunque passante per M, essa di necessità *ha in quel punto tangente*, e questa è contenuta nel piano dato. E questa conseguenza legittima della definizione è in contraddizione col concetto comune di piano tangente, potendosi sulla superficie condurre una curva non avente tangente, come la lossodromia in un suo polo. L'A., nel N. 207, non dà una vera definizione del piano tangente; ma conclude solo che esso « è così il luogo geometrico delle tangenti alle infinite curve, *dotate di tangente*, che passano per M e sono situate sulla superficie. » Questa espressione, ove si consideri come una definizione, lascia a desiderare. Invero da essa deriva immediatamente solo che « se due superficie si incontrano secondo una linea, di cui un punto sia M, se esse hanno in questo punto piani tangenti distinti, *e se la curva intersezione ha tangente in M*, questa è l'intersezione dei due piani tangenti »; mentrechè sussiste la proposizione, anche sopprimendo la condizione sottolineata, ed è di uso comune.

La minuzia di queste osservazioni conferma la grande precisione dell'opera, alla quale, pel bene dell'insegnamento, auguriamo vita prospera e lunga, e che presto sia seguita dal secondo volume. (P.)

SOFIA KOWALEVSKI.

I giornali recano la dolorosa notizia che è morta la signora Sofia Kowalevski, nata Corvin-Krukowski, dell'Università di Stockholm, dove professava analisi superiore. È morta a poco più di 37 anni (era nata a Mosca nel dicembre 1853), nella pienezza della sua vigorìa intellettuale, quando ciò che già aveva dato alla scienza era arra sicura del molto che le avrebbe dato in avvenire. Con Sofia Kowalevski gli *Acta Mathematica* perdono un valente collaboratore, l'alta scienza un cultore insigne, il mondo intellettuale femminile una delle personalità più illustri. Dire di Lei degnamente non consentono, per tacer d'altro, la brevità del tempo e l'indole del giornale; ma la *Rivista* crederebbe di lasciare inadempiuto un dovere se queste pagine non recassero un cenno di ricordo, una parola di ammirazione e di rimpianto. Questo solamente diremo che, allieva di Weierstrass, fu la Kowalevski una valorosa analista; e l'analisi seppe con singolare felicità adoprare nello studio di importanti problemi di meccanica e di fisica matematica. Resteranno celebri le Sue ricerche sulla rotazione di un corpo rigido

pesante ritenuto da un punto fisso, ricerche che La condussero alla scoperta di un nuovo caso d'integrabilità delle equazioni differenziali del moto. Nella Memoria, in cui la KOWALEVSKI espose gli studî fatti su quest'argomento, « l'auteur ne s'est pas contenté, ha scritto il Darboux (1), d'ajouter ainsi un résultat du plus haut intérêt à ceux qui nous ont été transmis sur ce sujet par Euler et par Lagrange: il a fait de la découverte que nous lui devons une étude approfondie dans laquelle sont employées toutes les ressources de la théorie moderne des fonctions. » La Memoria ottenne dall'Accademia delle Scienze di Parigi il premio Bordin per l'anno 1888 e l'inserzione ne' *Mémoires des Savants étrangers.*

Il Presidente dell'Accademia Janssen, annunciando, nell'adunanza solenne del 24 dicembre 1888, che il premio Bordin era conferito alla KOWALEVSKI, diceva: « Parmi les couronnes que nous allons donner, il en est une des plus belles et des plus difficiles à obtenir qui sera posée sur un front féminin. » Ora quella fronte femminea è stata tocca dall'ala della Morte, ma l'alloro che l'ha cinta è sempre verde; e l'opera e il nome di SOFIA KOWALEVSKI vivono nella storia della scienza.

Torino, 21 febbraio 1891.

E. NOVARESE.

(1) Relazione della Commissione aggiudicatrice del « prix Bordin » di cui si parla più innanzi.

Dimostrazione di un teorema sulla trasformazione delle curve algebriche.

Nota di E. BERTINI.

In molti lavori geometrici si applica, come noto, il seguente teorema: — *Qualunque curva piana (semplice o composta) si può, con una trasformazione birazionale, trasformare in un'altra fornita di soli punti doppi:* — ma non vi è fatto alcun cenno, per quanto mi consta, di una esplicita dimostrazione del teorema stesso. Forse si ritiene facile stabilirlo o con considerazione analoga a quella accolta da NOETHER per la riduzione di una superficie ad un'altra dotata soltanto di curva doppia e di punti tripli (1), ovvero riferendo la curva piana univoca-

(1) NOETHER, *Anzahl der Moduln einer Classe algebraischer Flächen* (Sitzungsberichte der k. Ak. der Wiss. zu Berlin, 1888) § I. Cfr. anche CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen*, pag. 664-65.

mente ad una curva di un iperspazio e poi proiettando quest'ultima da uno spazio arbitrario sul piano.

Comunque, espongo qui una dimostrazione del teorema, che mi pare semplice e rigorosa, ottenuta coll'aiuto d'una trasformazione piana doppia.

La data curva piana si trasformi dapprima (con una trasformazione cremoniana del suo piano) in un'altra Γ con soli punti multipli ordinari $A, A_1, A_2, \ldots A_r$. Si consideri uno A di tali punti e una rete di cubiche per A e per altri sei punti del piano $B_1, B_2, \ldots B_6$ indipendenti fra loro e dalla curva Γ. In particolare occorre che, fissati cinque di essi $B_1, B_2, \ldots B_5$, il sesto B_6 sia scelto esternamente a certi quattro luoghi $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$. Uno Λ_1 di questi luoghi è quello del nono punto base di un fascio di cubiche, di cui gli altri otto punti base sono $A, B_1, B_2; \ldots B_5$ e due punti di Γ, uno C fisso (preso arbitrariamente), l'altro C_1 variabile. Un altro luogo Λ_2 è quello del nono punto base di un fascio di cubiche che passano per $A, B_1, B_2, \ldots B_5$ e toccano Γ in un punto variabile. Un terzo luogo Λ_3 è costituito di r cubiche, ciascuna delle quali è pure descritta dal nono punto base di un fascio di cubiche per $A, B_1, B_2, \ldots B_5$ e tangenti in A_i $(i = 1, 2, \ldots r)$ ad una retta variabile intorno a questo punto. E infine il quarto luogo Λ_4 è composto di r curve, ciascuna generata dal nono punto di un fascio di cubiche per $A, B_1, B_2, \ldots B_5, A_i$ e per un punto variabile di Γ.

Nella trasformazione piana doppia, a cui dà origine la rete di cubiche per A_1 $B_1, B_2, \ldots B_6$ (¹) la curva Γ (del piano semplice) si trasforma in una curva Γ_1 (del piano doppio) univocamente, perchè B_6 è esterno a Λ_1 (onde C non può avere per punto congiunto alcun punto C_1 di Γ). Inoltre, per essere B_6 esterno a Λ_2, la trasformata Γ_1 non avrà regressi. La curva Γ_1 possederà invece un certo numero di punti doppi provenienti dai fasci della detta rete, di cui i due rimanenti punti base sono sopra Γ. Possederà altresì singolarità corrispondenti ai punti $A_1, A_2, \ldots A_r$, le quali saranno della stessa natura di queste e quindi singolarità ordinarie, perchè B_6 è esterno a Λ_3, cioè i punti A_i non giacciono sulla curva doppia del piano semplice, e perchè B_6 è esterno a Λ_4, cioè A_i non è congiunto ad alcun punto di Γ (²). Ed è chiaro

(¹) Cfr., ad es., De Paolis, *Le trasformazioni piane doppie* (Memorie della R. Accad. dei Lincei, serie 3ª, vol. 1°) n. 28.

(²) Nell'enunciato del teorema a pag. 668 delle citate *Vorlesungen* di Clebsch-Lindemann non si ha riguardo alla possibiltà di questi due casi. Per mantenere in quell'enunciato la locuzione « *in derselben Weise* », occorre escludere non soltanto i punti multipli che sono nei punti base della rete delle Φ, ma anche quelli che sono sulla jacobiana della rete (cioè sulle curve fondamentali e sulla curva doppia) e quelli che sono congiunti a punti della curva nella involuzione del piano semplice.

che Γ_1 non ha altre singolarità, ricordando che ad A corrisponde una retta e però alle direzioni di Γ uscenti da A, punti distinti di questa retta, e di più che nel piano semplice non esistono curve fondamentali.

Si perviene al teorema eliminando nello stesso modo successivamente le singolarità di Γ_1 corrispondenti ad A_1, A_2,... A_i.

Pavia, 21 febbraio 1891.

Formole di Logica Matematica.

Nota di G. Peano.

Nelle tavole che seguono (§§ 1-4) sono raccolte *tutte* le identità di Logica, riferentesi alle proposizioni, cioè tutte le forme di ragionamento che trovansi nei varii scritti menzionati in una Nota precedente. Il § 5 contiene le definizioni sulle classi. Premetteremo alcuni schiarimenti sul metodo seguito in questa raccolta.

Sulle definizioni.

Le idee che compaiono in una scienza si distinguono in *primitive* e *derivate*, secondochè non si possono o si possono definire. Per definizione d'un nome x si intende la convenzione di attribuire questo nome ad un gruppo di segni a, avente già significato ben noto (1). Questa convenzione si indica qui colla scrittura

$$x = a \quad [\mathrm{Def.}]$$

(1) Le definizioni, intese in questo senso, sono puramente *nominali;* esse esprimono sempre la convenzione di dare un nome breve ad una espressione più lunga che si presenta spesso in un genere di ricerche. Se si esaminano le definizioni che trovansi in matematica, si vede che sono definizioni puramente nominali tutte quelle che si riferiscono a parole che non trovansi nel linguaggio volgare. Così:

(triangolo isoscele) = (triangolo avente due lati eguali),

(numero primo) = (numero divisibile solo per se stesso e per l'unità),

come pure « i numeri a e b sono primi fra loro » ovvero « sono congruenti rispetto ad un dato modulo » ecc., sono espressioni che si conviene di sostituire ad altre precedentemente note, ma più complicate.

Appartengono alla stessa categoria le definizioni di nomi che trovansi più o meno comuni nel linguaggio ordinario, e che sono presi in un significato ben preciso e determinato, come *cerchio, sfera*, ecc.

Non soddisfano evidentemente alle condizioni precedenti le definizioni che si dànno ordinariamente di *numero, unità, punto, retta*, e così via;

La questione « Un dato ente si può definire? » non ammette risposta assoluta. Si può solo rispondere quando la domanda sia enunciata sotto la forma « Dati gli enti a, b... si può definire l'ente x? ».

Le idee, le cui proprietà si studiano in questa Nota, sono quelle espresse dai segni $\supset$, $\cap$, $=$, $-$, $\cup$, Λ. Fra queste assumeremo come primitive le $\supset$, $\cap$, $-$, Λ; e saranno definite le $=$ e $\cup$ (1).

Sulle dimostrazioni.

Le proposizioni che compaiono in una scienza si distinguono alla loro volta in *primitive* (assiomi e postulati), e *derivate* (teoremi, corollarii, ecc.), secondochè non si possono o si possono dimostrare. Dimostrare una proposizione significa ottenerla combinando convenientemente le proposizioni già ammesse. Alla domanda « Una data proposizione si può dimostrare? » si può solo rispondere quando si sia, esplicitamente o implicitamente, detto di quali proposizioni ci possiamo servire.

In questa Nota si assumono come proposizioni primitive le prime 8 e la 12 del § 1, le 1, 3 e 21 del § 3, e la 1 del § 4; esse sono indicate

---

siffatte proposizioni sono a considerarsi a preferenza come schiarimenti. Per vedere p. e. se si possa definire l'*unità* e il *numero* (intero), occorre fissare di quali idee più semplici ci possiamo servire. Quindi le proposizioni di Euclide (Libro VII):

Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ὃ ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται,
Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδον συγκείμενον πλῆθος,

« Unità è ciò, secondo cui ogni cosa è chiamata una, »
« Numero è la moltitudine composta di unità, »

sarebbero definizioni se i termini seguenti le parole *unità* e *numero* esprimessero idee più semplici di queste. Ora nella prima il circolo vizioso fra le parole *μονάς* e *ἕν*, meno evidente in greco, diventa chiaro fra le parole *unità* e *uno* delle altre lingue; nella seconda c'è ragione a dubitare che sia più semplice l'idea di *numero* piuttostochè quelle di *moltitudine composta*. Si noti però che le proposizioni precedenti di Euclide solo in alcuni testi sono chiamate definizioni. Nell'edizione *princeps*, Basileae, 1533, esse non sono precedute da alcun titolo.

(1) La distinzione delle idee d'una scienza in primitive e derivate presenta alcune volte dell'arbitrario. Così, se mediante a e b si può definire c, e mediante a e c si può definire b, resta in nostro arbitrio la scelta, come ente derivato, fra b e c. Così nel nostro caso avremmo potuto fare altre scelte: solo ragioni di semplicità ci fanno propendere alla fatta.

coll'abbreviazione [Pp]. Delle rimanenti si dà, entro [ ], la dimostrazione [1].

Notazioni.

Si suppone noto l'uso della punteggiatura.

Se p è una proposizione, o formola, contenente le lettere x, y,..... con $\binom{a}{x}p$ si intende ciò che diventa p, quando al posto di x si legga a; e con $\binom{a,\ b}{x,\ y}p$ si intende ciò che diventa p, quando al posto di x e y si legga a e b; e così via. Di questa notazione faremo uso nelle sole dimostrazioni.

Nelle citazioni, la lettera P seguita da un numero indica la proposizione del § così numerata; per citare la proposizione d'un altro §, si farà seguire il segno del § da quello della proposizione. Le proposizioni però che non hanno importanza per se stesse, ma sono *lemmi* per le proposizioni successive, sono indicate colle lettere (α), (β),...

Per brevità scriveremo Hp e Ts al posto delle parole *ipotesi* e *tesi;* con questi termini intendiamo, nella deduzione a dimostrarsi, il primo e il secondo membro.

Con queste sole notazioni il lettore è, a rigore, in grado di intendere le formole seguenti. Però, per facilitare il còmpito, le formole sono accompagnate da note esplicative.

Quanto segue è in sostanza una *tavola di formole*, destinata ad essere consultata piuttostochè letta. Non ci dissimuliamo i difetti che essa presenta; ma pubblichiamo questo lavoro, che si può considerare come il primo in questo genere, colla speranza che altri lo possa completare e perfezionare.

§ 1.

Le lettere a, b,... stanno per indicare proposizioni qualunque.

La scrittura $a \supset b$ significa « da a si deduce b. »

L'affermazione simultanea delle proposizioni a, b, c,... si indica con abc...

1. $a \supset a$ [Pp.]

2. $a \supset aa$ [Pp.]

---

(1) La distinzione delle proposizioni in primitive e derivate presenta pure dell'arbitrarietà; non c'è un criterio per riconoscere immediatamente a quale categoria appartenga una data proposizione; solo dal paragone di essa colle altre risulta se essa esprima nel modo più semplice una data verità, e quindi in quale categoria convenga si classifichi.

3. $ab \supset a$ [Pp.]

4. $ab \supset ba$ [Pp.]

5. $abc \supset acb$ [Pp.]

6. $a \supset b \,.\supset.\, ac \supset bc$ [Pp.]

7. $a \,.\, a \supset b :\supset.\, b$ [Pp.]

8. $a \supset b \,.\, b \supset c :\supset.\, a \supset c$ [Pp.]

9. $abc \supset bac$ $\left[\text{P4.} \begin{pmatrix} ab, & ba \\ a, & b \end{pmatrix} \text{P6 . P7} :\supset. \text{P9}\right]$

10. $ab \supset b$ $\left[\text{P4.} \begin{pmatrix} b, & a \\ a, & b \end{pmatrix} \text{P3 . P8} :\supset. \text{P10}\right]$

(α) $a \supset b \,.\, b \supset c \,.\, c \supset d :\supset: a \supset c \,.\, c \supset d$ [P8 . P6 : $\supset$. (α)]

11. $a \supset b \,.\, b \supset c \,.\, c \supset d :\supset.\, a \supset d$ [(α) . P8 : $\supset$. P13]

12. $b \supset.\, a \supset ab$ [Pp.]

(α) $c \,.\supset.\, a \supset ac$ $\left[\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} \text{P12} .\supset. (\alpha)\right]$

(β) $c \,.\, ac \supset bc :\supset: a \supset ac \,.\, ac \supset bc$ [(α) . P6 : $\supset$. (β)]

(γ) $c \,.\, ac \supset bc :\supset.\, a \supset bc$ [(β) $\supset$ (γ)]

(δ) $a \supset b \,.\, c :\supset: ac \supset bc \,.\, c$ [P6 . $\supset$. (δ)]

(ε) $a \supset b \,.\, c :\supset: c \,.\, ac \supset bc$ [(δ) . P4 : $\supset$. (ε)]

13. $a \supset b \,.\, c :\supset.\, a \supset bc$ [(ε) (γ) . $\supset$. P13]

14. $a \supset b \,.\supset.\, ca \supset cb$

[Hp. P6 . P4 : $\supset$: $ac \supset bc \,.\, ca \supset ac \,.\, bc \supset cb$: $\supset$. Ts.]

15. $a \supset b \,.\supset.\, a \supset ab$ $\left[\text{Hp.} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \text{P14 . P2} :\supset. \text{Ts.}\right]$

16. $a \supset b \,.\, c \supset d :\supset.\, ac \supset bd$

[Hp. $\supset$: $ac \supset bc \,.\, c \supset d :\supset: ac \supset bc \,.\, bc \supset bd$: $\supset$. Ts.]

17. $a \supset b \,.\, a \supset c :\supset.\, a \supset bc$ [Hp. P16 : $\supset$: $aa \supset bc$. P2 : $\supset$. Ts.]

18. $a \supset bc \,.\supset: a \supset b \,.\, a \supset c$ [P3 . P10 . P17 : $\supset$. P21]

19. $a \supset.\, b \supset c :\supset.\, ab \supset c$ [Hp. $\supset$ :: $ab \supset : b \supset c \,.\, b$.·. P7 :: $\supset$. Ts.]

20. $ab \supset c \,.\supset: a \supset.\, b \supset c$ [Hp. P12 : $\supset$ :: $a \supset.\, b \supset ab : ab \supset c$.·.

P13 :: $\supset$ :: $a \supset : b \supset ab \,.\, ab \supset c$.·. P8 :: $\supset$. Ts.]

21. $b \supset c \,.\supset: a \supset b \,.\supset.\, a \supset c$ [P8 . P20 : $\supset$. P21]

22. $a \supset b \,.\supset: b \supset c \,.\supset.\, a \supset c$ [P8 . P20 : $\supset$. P22]

Note al § 1.

« Si passa da un sistema di proposizioni ad un altro che ne è conseguenza, ripetendo (1) le proposizioni già enunciate, (2) anche più volte, (3) sopprimendo qualcuna delle proposizioni congiunte, (4) o invertendo l'or-

dine di due proposizioni, (5) o, nel sistema di tre proposizioni, le due ultime. (6) Ai due membri d'una deduzione si può congiungere una stessa proposizione. (7) Se a è vera, e se da a si deduce b, allora b è vera. (8) Sillogismo. Tutte queste proposizioni sono *primitive;* esse non si possono cioè dedurre da altre più semplici. »

(9) « Nell'affermazione simultanea di tre proposizioni si può invertire l'ordine delle due prime. Infatti la prop. 4 dice che $ab \supset ba$; congiungendo ai due membri la c, cosa permessa in virtù della prop. 6, si ha la prop. a dimostrarsi, usando la forma di sillogismo indicata nella prop. 7. » Analogamente si dimostra che è permesso di permutare comunque l'ordine di più proposizioni simultanee.

(12) « Se è vera la b, allora da a si può dedurre la ab, » ossia « ad una proposizione a si può congiungere una proposizione vera b. Questa prop. non si sa dimostrare. »

(13) « Se da a si deduce b, e se è vera la c, allora da a si deduce bc, » ossia « alla tesi d'una deduzione si può congiungere una proposizione vera. » La dimostrazione è contenuta nelle prop. (α) ... (ε) precedenti. Esse dicono: « Leggendo c al posto di b nella 12 si ha la (α); congiungendo ai due membri della (α) la $ac \supset bc$, cosa lecita in virtù di P6, si ha la (β); da questa, con un sillogismo che non è più indicato, si ha la (γ). Unendo ai due membri della P6 la c, si ha la (δ); da questa, permutando i due fattori del secondo membro, la (ε); la (ε) e la (γ) sono le premesse d'un sillogismo, la cui conseguenza è la P13 a dimostrarsi. »

Esaminando questa dimostrazione risulta chiaro che la P13 si ottiene combinando puramente le forme di ragionamento enunciate precedentemente; quest'analisi, assai faticosa, è utile sia fatta una volta; in seguito le forme di ragionamento più semplici, come il permutare le proposizioni, i sillogismi, ecc., non sono più esplicitamente enunciate.

(19) « Se da a si deduce che da b si deduce c, allora da ab si deduce c. Infatti (congiungendo ai due membri dell'ipotesi la proposizione b), dall'Hp. si deduce che: da ab si deduce che da b si deduce c, e che è vera la b. Quindi per la P7 si ha la tesi. » Questa forma di ragionamento che permette di passare da una relazione contenente due segni $\supset$ ad un'altra che ne contiene uno solo, è in pratica spesso usata.

§ 2.

1. $a = b . = : a \supset b . b \supset a$ [Def.]
2. $a = a$ [§ 1 P1 . $\supset$. P2]
3. $a = aa$ [§ 1 P2. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ § 1 P3 : $\supset$. P3]
4. $ab = ba$ [§ 1 P4. $\begin{pmatrix} b, & a \\ a, & b \end{pmatrix}$ § 1 P4 : $\supset$. P4]
5. $abc = acb$ [§ 1 P5 . $\supset$. P5]
6. $a = b . \supset . a \supset b$ [P1 . § 1 P3 : $\supset$. P6]

7. $a = b . \supset . b \supset a$ [P1 . § 1 P10 : $\supset$. P7]

8. $a \supset b . b \supset a : \supset . a = b$ [P1 . § 1 P1 : $\supset$. P8]

9. $a = b . \supset . b = a$ [P1 . § 1 P4 : $\supset$. P9]

10. $a = b . = . b = a$ [P9. $\begin{pmatrix} b, & a \\ a, & b \end{pmatrix}$ P9 : = . P10]

11. $a = b . b \supset c : \supset . a \supset c$ [Hp. $\supset : a \supset b . b \supset c : \supset . a \supset c$]

12. $a \supset b . b = c : \supset . a \supset c$ [Idem]

13. $a = b . b = c : \supset . a = c$

[Hp. $\supset : a \supset b . b \supset c . c \supset b . b \supset a : \supset : a \supset c . c \supset a : \supset$. Ts.]

14. $a = b . b = c . c = d : \supset . a = d$.

[Hp. P13 : $\supset : a = c . c = d : \supset$. Ts.]

15. $a = b . \supset . ac = bc$

[Hp. $\supset : a \supset b . b \supset a . \supset : ac \supset bc . bc \supset ac : \supset$. Ts.]

16. $a = b . c = d : \supset . ac = bd$ [Hp. $\supset : ac = bc . bc = bd : \supset$. Ts.]

(α) $a \supset b . \supset . a = ab$ [Hp. § 1 P15 . § 1 P3 : $\supset$. Ts.]

(β) $a = ab . \supset . a \supset b$ [Hp. § 1 P10 : $\supset$. Ts.]

17. $a \supset b . = . a = ab$ [(α) (β) = P17]

18. $a \supset bc . = : a \supset b . a \supset c$ [§ 1 P17 . § 1 P18 : = . P18]

19. $a \supset . b \supset c : = . ab \supset c$ [§ 1 P19 . § 1 P20 : = . P19]

Note al § 2.

(1) « Per definizione, dire che due proposizioni sono equivalenti, $a = b$, significa che dalla prima si deduce la seconda, e viceversa. » Quindi la equivalenza di due proposizioni è definita mediante la deduzione.

(4) « ... Infatti, per la prop. 4 del § 1 si ha $ab \supset ba$; scambiando in questa a con b, si ha $ba \supset ab$; l'insieme di queste due esprime la prop. a dimostrarsi. »

La prop. 17 esprime la deduzione mediante una eguaglianza.

§ 3.

La scrittura $-a$ indica la negazione della proposizione a.

1. $a \supset b . \supset . -b \supset -a$ [Pp.]

2. $a = b . \supset . -a = -b$ [P1. $\begin{pmatrix} b, & a \\ a, & b \end{pmatrix}$ P1 : $\supset$. P2]

3. $-(-a) = a$ [Pp.]

4. $a \supset b . = . -b \supset -a$ [P1. $\begin{pmatrix} -b, & -a \\ a, & b \end{pmatrix}$ P1 : $\supset$. P4]

5. $a = b . = . -a = -b$ [P2 $\supset$ P5]
6. $a \cup b = -[(-a)(-b)]$ [Def.]
7. $-(a \cup b) = (-a)(-b)$ [P6 $\supset$ P7]
8. $-(ab) = (-a) \cup (-b)$ $\left[\begin{pmatrix} -a, & -b \\ a, & b \end{pmatrix} \text{P6} = \text{P8}\right]$
9. $a \cup b = b \cup a$ $[a \cup b = -[(-a)(-b)] = -[(-b)(-a)] = b \cup a]$
10. $a \cup a = a$ $[a \cup a = -[(-a)(-a)] = -(-a) = a]$
11. $a \supset b . \supset . a \cup c \supset b \cup c$
 [Hp. $\supset . -b \supset -a . \supset . -b - c \supset -a - c . \supset$. Ts.]
12. $a = b . \supset . a \cup c = b \cup c$ [P11 $\supset$ P12]
13. $a \supset b . c \supset d : \supset . a \cup c \supset b \cup d$ [P11 $\supset$ P13]
14. $a = b . c = d : \supset . a \cup c = b \cup d$ [P12 $\supset$ P14]
15. $a \supset a \cup b$ [§ 1 P3 $\supset . -a - b \supset -a . \supset$. Ts.]
16. $a \supset b . = . b = a \cup b$ [§ 2 P17 $\supset$ P16]
17. $a \supset c . b \supset c : = . a \cup b \supset c$ [§ 2 P18 $\supset$ P17]
18. $a \cup ab = a$ [§ 1 P3 $\supset : ab \supset a$. P16 $: \supset . a \cup ab = a$]
19. $a(a \cup b) = a$ [P15 . § 2 P17 $: \supset$. P19]
20. $ac \cup bc \supset (a \cup b)c$ [P15 $. \supset : ac \supset (a \cup b)c . bc \supset (a \cup b)c$. P17 $: \supset$. Ts.]
21. $(a \cup b)c \supset ac \cup bc$ [Pp.]
22. $(a \cup b)c = ac \cup bc$ [P22 $= :$ P20 . P21]
23. $(a \cup c)(b \cup c) = ab \cup c$ $[(a \cup c)(b \cup c) = ab \cup ac \cup bc \cup c = ab \cup c]$

Note al § 3.

La P22, esprimente la proprietà distributiva della moltiplicazione logica, equivale all'insieme della 20, che si può dimostrare, e della 21, che è una proposizione primitiva. La P23 esprime la proprietà distributiva dell'addizione logica rispetto alla moltiplicazione.

§ 4.

Il segno Λ sta per indicare l'*assurdo*.

1. $a - a = \Lambda$ [Pp.]
2. $a\Lambda = \Lambda$ $[a\Lambda = aa - a = a - a = \Lambda]$
3. $\Lambda \supset a$ $[\Lambda \supset a - a \supset a]$
4. $a \cup \Lambda = a$ [P3 . § 3 P16 $: \supset$. P4]
5. $a \cup (b - b) = a$ [P1 . P4 $. \supset$. P5]
6. $ab \cup a - b = a$ [P5 $\supset$ P6]

7. $a \supset \Lambda . = . a = \Lambda$ [P3 ɔ P7]

(α) $a \supset b . \supset . a - b = \Lambda$

[Hp. $\supset : a - b \supset b - b$. P1 : $\supset : a - b \supset \Lambda$. P7 : $\supset$. Ts.]

(β) $a - b = \Lambda . \supset . a \supset b$ [Hp. P6 : $\supset : a = ab$. § 2 P17 : $\supset$. Ts.]

8. $a \supset b . = . a - b = \Lambda$ [(α) (β) = P8]

9. $a \cup b = \Lambda . = : a = \Lambda . b = \Lambda$ [P7 . § 3 P17 : $\supset$. P9]

§ 5. — *Sulle classi.*

Essendo a, b,... degli individui, con $a = b$ si indica l'identità di a e b. L'identità soddisfa alle tre condizioni fondamentali:

1. $a = a$
2. $a = b . \supset . b = a$
3. $a = b . b = c : \supset . a = c$.

Scriveremo K invece della parola *classe*.

Essendo s una classe, scriveremo $x \varepsilon s$ per indicare che x è un individuo della classe s.

4. $a, b \varepsilon \mathrm{K} . \supset .\!\cdot . a \supset b . = : x \varepsilon a . \supset_x . x \varepsilon b.$ [Def.]

5. » $. \supset .\!\cdot . a = b . = : a \supset b . b \supset a$ [Def.]

Essendo p una proposizione contenente una lettera x, con $\overline{x \varepsilon} p$ si intende la classe degli individui x che soddisfano alla condizione p.

6. $a, b \varepsilon \mathrm{K} . \supset . a \frown b = \overline{x \varepsilon} (x \varepsilon a . x \varepsilon b)$ [Def.]

6.' » $. \supset . ab = a \frown b$

7. » $. \supset . a \cup b = \overline{x \varepsilon} (x \varepsilon a . \cup . x \varepsilon b)$ [Def.]

8. $a \varepsilon \mathrm{K} . \supset . - a = \overline{x \varepsilon} (x - \varepsilon a)$ [Def.]

9. $a \varepsilon \mathrm{K} . \supset .\!\cdot . a = \Lambda . = : x \varepsilon a . =_x \Lambda$ [Def.]

La risoluzione dei problemi di Aritmetica

NELLE SCUOLE SECONDARIE INFERIORI.

Perchè si insegna l'aritmetica nelle scuole secondarie inferiori? Indipendentemente dallo scopo a cui ogni insegnamento deve tendere — lo sviluppo delle facoltà intellettuali — l'aritmetica si insegna per porre in grado i giovani di risolvere quei problemi che si presentano continuamente nella vita pratica.

I problemi di aritmetica elementare che si presentano nella vita pratica, hanno per dati grandezze o numeri? Evidentemente i dati sono grandezze misurate e numeri ([1]). I problemi, pratici, di carattere puramente numerico, sono pochi e riduttabili facilmente a problemi sulle grandezze.

Ho detto trovarsi nei dati dei problemi dei numeri; questi servono ad esprimere concetti semplici che l'uomo intuisce imparando a parlare, e precisamente i concetti di 2, 3, 4 ..... *volte più grande o più piccolo*, e il concetto di *frazione* che dai primi due può facilmente dedursi. — Sembra opportuno — ammesso che in una scuola secondaria inferiore non si possa neanche pensare di dimostrare scientificamente le verità a cui si ricorre - valersi di questi concetti che sono in natura, per risolvere i problemi pratici. Si fa questo negli ordinari trattati di aritmetica? Non mi pare. Non si definisce, difatti, in modo esatto la moltiplicazione; delle operazioni *divisione* ve ne sono due, ad una delle quali si dà almeno tre significati, e in tutto non si ricorre mai ai concetti naturali sopra indicati e ciò potrebbe, in parte, servire a spiegare il fatto che giovanetti, che presentano prima di entrare nelle scuole elementari attitudine a risolvere facili quistioni numeriche, perdono poi completamente tale attitudine dopo un anno o due che frequentano la scuola.

***

Senza cercare di definire — come si fa sempre — la *grandezza*, basta dire che sono grandezze le lunghezze, le aree, i volumi, i pesi, i tempi, ecc., — e il concetto di grandezza si formerà da sè nella mente dell'alunno abbastanza chiaro. Questo concetto di grandezza è indispensabile introdurlo fin da principio perchè è condizione dell'efficacia dell'insegnamento elementare di procedere dal concreto all'astratto. Le lunghezze, le collezioni di oggetti eguali, si prestano facilmente come esempi pratici per aiutare il lavoro della mente nell'intuire il concetto di numero, di ordine di somma e di 2, 3, 4, ... volte più grande o più piccolo, a condizione che l'insegnante non presenti l'esempio come una definizione — che definizione nel senso scientifico della parola non sarà mai. —

Le grandezze che si presentano nei problemi elementari della pratica, sono grandezze continue o discontinue. È carattere comune delle due specie di grandezze di poter essere sommate e di ammettere i multipli secondo qualunque numero. È carattere delle prime (continue) di

---

([1]) Si veda la nota a pag. 39.

ammettere anche i summultipli secondo qualunque numero, mentre le seconde ammettono solo dei summultipli secondo certi numeri e sempre in numero finito.

Considerando grandezze continue, la frase A *è una grandezza* m *volte più grande di* B, o A è multipla di B secondo m, è propria del linguaggio comune, come pure è propria del linguaggio comune quella che da essa si deduce, B *è* m *volte più piccola di* A, o B è summultipla di A secondo m, o B è $\frac{1}{m}$ (un emmesimo) di A. Per definizione si può dire che A è gli $\frac{n}{m}$ (n emmesimi) di B quando è n volte più grande della grandezza m volte più piccola di B.

Le grandezze discontinue e in special modo le collezioni di oggetti eguali, danno il concetto di decomposizione in parti eguali, e quindi, al concetto di m volte più grande o più piccolo è associato — tanto che l'uno vale l'altro — il concetto di decomposizione in parti eguali. Così dire che A è m volte più grande di B, equivale a dire che A può decomporsi, o immaginarsi decomposta, in m parti eguali a B. Analogamente quando si dice che A è gli $\frac{n}{m}$ di B si dice che decomposta A in n parti eguali, una di queste parti è eguale ad $\frac{1}{n}$ di B, e che in conseguenza occorrono m parti eguali ad $\frac{1}{n}$ di A per formare B: quindi se A è gli $\frac{n}{m}$ di B, B è gli $\frac{m}{n}$ di A.

***

Le denominazioni ora introdotte permettono, non di definire ma di aiutare l'intuizione a concepire il concetto di *misura*. Prendendo come esempio le grandezze geometriche, e in special modo i segmenti, supposto che B sia un segmento di lunghezza data invariabilmente (il metro p. e.), dicendosi che il segmento A è gli $\frac{n}{m}$ di B, si dà il modo di costruire graficamente il segmento A, poichè si sa che basta decomporre B in m parti eguali e di queste sommarne n per ottenerne A. Senza per questo definire il numero, si può dire che $\frac{n}{m}$ è il numero che misura A mediante B. L'intuizione non tarda ad estendere alle altre grandezze questo concetto di misura e tanto basta per l'insegnamento elementare.

***

L'algebra mostra chiaramente come non sia necessario sapere eseguire meccanicamente le operazioni sui numeri per risolvere un problema. È quindi naturale pensare che l'aritmetica deve essere (didatticamente parlando) divisa in due parti distinte, una contenente le regole meccaniche per eseguire le operazioni, l'altra contenente gli enunciati dei problemi fondamentali (ai quali cioè tutti gli altri si riducono) nelle grandezze e le regole per eseguire le operazioni relative sui numeri che misurano le grandezze dati dei problemi. Anzi, visto che le operazioni sui numeri fratti si riducono, per la parte meccanica, ad operazioni — corrispondenti o no — sui numeri interi, è naturale limitare la prima parte alle operazioni sui numeri interi, come esprimenti la misura di quantità discontinue o come enti astratti, senza introdurre il concetto di numero frazionario; e nella seconda le operazioni sui numeri frazionari non in quanto questi sono numeri astratti, ma come numeri esprimenti misure di grandezze continue.

***

Le operazioni fondamentali sui numeri interi sono quattro, ma esse sono derivate da una sola, la somma, che è molto meglio cercare di non definire e considerarla, quale è effettivamente, come concetto proprio dell'intuizione.

I termini della somma sono *parti* di questa; quindi il concetto di maggiore e minore viene introdotto naturalmente dicendo che $a > b$ se a contiene, insieme ad altre, delle parti eguali rispettivamente a *tutte* le parti di b.

Dati due numeri disuguali si può cercare il numero (differenza) che sommato col minore di essi dà per somma il maggiore, e la parte meccanica dell'operazione *sottrazione* vien dedotta dall'operazione *somma*, introducendo il solo teorema $(a+r)-(b+r)=a-b$.

Possiamo concepire m numeri (interi) eguali ad a e sommarli. La somma $a+a+a+\ldots+a$ si indica col simbolo $a.m$ e si chiama il *prodotto* di a per m. Essa non è altro che il numero m volte più grande di a. La parte meccanica dell'operazione *moltiplicazione* vien dedotta dalla somma per $m<10$; per $m>10$ bisogna ricorrere alle due regole $a.m=m.a$; $(a+b+c+\ldots).m=a.m+b.m+c.m+\ldots$

Dati due numeri disuguali possiamo togliere dal maggiore il minore; dalla differenza togliere ancora il minore se è possibile, e così di seguito fino a che la sottrazione può farsi. Il *numero intero* che esprime quante volte b si può togliere da a $(a>b)$ è la *parte intera del quoziente*

della divisione di a per b: ciò che rimane di a dopo aver tolto b tante volte quante è possibile è il *resto* che è evidentemente minore di b. Supposto che m sia la parte intera del quoziente e r il resto, è, per le definizioni precedenti, evidente la relazione $a = b \cdot m + r$. Per questa operazione *divisione* non può adoperarsi il segno : fino a che non sia introdotto il concetto di frazione con le proprietà di queste, e m non potrà chiamarsi *quoziente* (meno che per $r = o$) fino a che le due distinte operazioni *divisione* si chiameranno col medesimo nome. Dalla eguaglianza $a = b \cdot m + r$ si deduce che a consta di due parti, una m volte più grande di b, l'altra r minore di b. Se $r = o$ allora a è m volte più grande di b e quindi b è $\frac{1}{m}$ di a, o, essendo $b \cdot m = m \cdot b$ per b intero, m è $\frac{1}{b}$ di a, il che dà il mezzo di riconoscere se è intero il summultiplo di a secondo b, o se una grandezza discontinua (misurata) ammette o no il summultiplo secondo b.

***

Noterò poi esplicitamente che quanto ho detto sopra si riferisce puramente alla parte didattica dell'insegnamento pratico del meccanismo numerico. La questione sotto il punto di vista scientifico è risoluta, a me pare completamente [1], ma se essa può servire nell'insegnamento elementare per ridurre al minimo le proprietà che si devono dimandare all'intuizione e quelle, dimostrabili, che si devono enunciare come vere per giustificare la parte pratica delle operazioni, non può esservi applicata integralmente. Noto, difatti, che mentre i bambini, dai 7 o 8 mesi in su, danno prova di imparare rapidamente a distinguere un oggetto da un altro e in seguito dimostrano, con le poche parole che hanno imparato a pronunziare, che nella loro mente ha luogo un vero e proprio lavoro di deduzione logica, nei giovinetti che escono dalle scuole elementari si trova inettitudine ad intuire e a dedurre. Perchè? È una naturale evoluzione, dipendente dalla trasformazione, probabile in quell'età, delle cellule cerebrali o piuttosto il fatto accennato ci indica che l'insegnamento elementare non seconda il naturale svolgimento delle facoltà intellettuali? Non pretendo risolvere la questione, la presento; solo osservo che durante i tre anni di scuola secondaria inferiore si nota un graduale rinforzamento delle facoltà deduttive, e a spiegare ciò si prestano, separatamente e in egual grado, le due ipotesi prece-

(1) G. Peano, *Arithmetices principia, nova methodo exposita* (Torino, Bocca, 1889).

denti. Se, come mi risulta dall'esperienza, è utile fare in geometria le dimostrazioni, senza però esigere che si ripetano, perchè in tal modo si abituano i giovinetti a comprendere, per forza di abitudine, che si possono dimostrare le verità che si enunciano, ciò non è più applicabile per l'aritmetica — si intende per ciò che riguarda i principii astratti fondamentali che non appartengono al campo dell'intuizione — ove non abbiamo, come in geometria, una figura che in certo modo dimostra praticamente la verità enunciata.

***

Introdotto, come è già stato indicato, il concetto di frazione si può definire la frazione ordinaria decimale come il numero che ha 10^n per denominatore e fare la convenzione della sua scrittura mediante la virgola.

Alla risoluzione dei problemi fondamentali nelle grandezze misurate è necessario far precedere, per ciò che riguarda la parte meccanica delle operazioni, le così dette trasformazioni delle frazioni e la riduzione delle varie specie di numeri ad un tipo unico. La prima parte ha carattere pratico, la seconda didattico, e quest'ultima trae la sua importanza dal fatto che sei o sette regole bastano per le operazioni sui fratti ordinari e decimali.

Riguardo alla prima parte occorre osservare che è necessario saper risolvere i due problemi — i cui enunciati riunisco per ora in un solo — « Dato un numero trovarne il multiplo o il summultiplo secondo m. » La risoluzione del problema dipende dalle due regole che con le notazioni algebriche — essendo $\frac{a}{b}$ il numero dato — possono enunciarsi così: $\frac{a}{b}.m=\frac{a.m}{b}$, o, se $b:m$ è un numero intero, $\frac{a}{b}.m=\frac{a}{b:m}$; $\frac{a}{b}:m=\frac{a}{b.m}$, o, se $a:m$ è un numero intero, $\frac{a}{b}:m=\frac{a:m}{b}$, quando i segni . e : si leggano, rispettivamente, *reso ... volte più grande* o *multiplo secondo ...*, *reso ... volte più piccolo* o *summultiplo secondo...* È conveniente dimostrare queste regole nelle scuole secondarie inferiori? Non lo credo; basterà darle come vere e limitarsi a far osservare che esse sono verificate quando $\frac{a}{b}$ esprime la misura di un segmento. — Dalle due regole ora indicate e osservando che 1 è il denominatore di tutti i numeri interi si deduce p. e. che il numero 7 volte più piccolo di 3 è $^3/_7$, verità che l'analfabeta può intuire, ma che gli alunni delle scuole elementari non sanno mai dire.

Riguardo alla seconda parte — intendendo, come si è sottinteso nelle cose precedenti, che ci limitiamo ai numeri commensurabili — bisogna far osservare che dei tre tipi di numeri, *interi, fratti decimali, fratti ordinari,* se ne può formare uno solo, il fratto ordinario. P. e. i numeri 4; 3, 6; $^5/_7$ si scrivono sotto la forma $^4/_1$; $^{36}/_{10}$; $^5/_7$ mettendosi così in ognuno in evidenza il denominatore. Questa regola generale semplicissima risparmia per ogni operazione tutti i casi e sottocasi che ordinariamente si considerano, indebolendo inutilmente le facoltà ritentive dell'alunno, mentre è provato che tali facoltà diminuiscono col crescere dell'età e crescono invece quelle deduttive.

***

Esaminiamo ora i problemi fondamentali sulle grandezze, quelli cioè ai quali tutti gli altri possono esser ridotti. Tali problemi sono evidentemente cinque:

1° *Date due o più grandezze, della medesima specie, trovarne la somma.*
2° *Date due grandezze diseguali, della medesima specie, trovarne la differenza.*
3° *Data una grandezza trovare le grandezze di essa multiple secondo 2, 3, 4,...*
4° *Data una grandezza trovarne — se esistono — le grandezze di essa summultiple secondo 2, 3, 4,...*
5° *Date due grandezze diseguali, della medesima specie, trovare quante volte la minore può togliersi dalla maggiore e quanto avanza.*

È da notarsi che risultato dei primi quattro problemi è sempre una grandezza della medesima specie delle grandezze date, mentre per il quinto è un numero intero (sempre intero), e una grandezza della medesima specie delle due date. Il risultato numerico del 5° problema sarà in generale il numero che misura una grandezza di specie diversa dalle due date: così p. e. « In quante ore una cannella che versa litri 18 all'ora può empire una vasca della capacità di litri 527? » il risultato numerico rappresenta *ore*, la grandezza rimanente sono i litri che si debbono ancora versare (in meno di un'ora) per empire la vasca. Nell'esempio ora considerato il tempo è una grandezza continua e allora il problema può esser risoluto mediante il 3° e 4° fondamentale dicendo: se 18 litri sono versati dalla cannella in un'ora, un litro sarà versato in $^1/_{18}$ di ora e 527 litri in $^{527}/_{18}$ di ora $= 23^h\ 43'\ 20''$. Quest'altro problema « Quanti poveri si potranno beneficare con L. 250 dando a ciascuno L. 7? » non è possibile risolverlo col 4° fondamentale, ma solamente col 5° perchè la grandezza *uomo* è discontinua.

Ai cinque problemi fondamentali può aggiungersene un sesto, utile nella pratica, ma non più fondamentale, poichè esso dipende dal 3° e 4°:

Data una grandezza trovarne gli $\frac{n}{m}$.

Anche il risultato di questo è, come è naturale, una grandezza.

In ultima analisi i problemi fondamentali per le grandezze continue sono cinque (1°, 2°, 3°, 4°, 5°); per le grandezze discontinue sono quattro (1°, 2°, 3°, 5°); il 6° vale per le grandezze continue, non vale — in generale — come in generale non vale il 4°, per le grandezze discontinue.

***

Sia che partendo dal concetto di numero astratto si passi al concetto di misura delle grandezze, ponendo in tal caso convenienti postulati per le grandezze; sia che partendo dal concetto di grandezza si passi al concetto di numero come misura di quelle, ponendo in tal caso convenienti postulati per le grandezze e per i numeri, si può stabilire sempre una relazione univoca (non reversibile) tra le grandezze e i numeri in un dato modulo (unità di misura) e, indicando con a, b, c,... i numeri che misurano le grandezze A, B, C,... mediante una data unità di misura U, dimostrare i seguenti teoremi:

1° Se $A = B + C + D + \dots$ è $a = b + c + d + \dots$

2° Se $A \lesseqgtr B$ è $a \lesseqgtr b$

3° Se $A = B - C$ è $a = b - c$

4° Se A è multipla di B secondo m è $a = b \, . \, m$

5° Se A è summultipla di B secondo m è $a = b : m$

6° Se A si compone di due parti una multipla di B secondo m e l'altra $R < B$ è $a = b \, . \, m + r$ con $r < b$

L'alunno della scuola secondaria inferiore intuisce queste proprietà, che non è conveniente dimostrargli in nessuno dei due modi sopra indicati.

Per conseguenza i problemi fondamentali sui numeri, considerando questi come elementi per la risoluzione di problemi i cui dati sono grandezze misurate, sono i seguenti, che corrispondono a quelli sulle grandezze:

1° *Dati due o più numeri, trovarne la somma.*
2° *Dati due numeri diseguali, trovarne la differenza.*
3° *Dato un numero, trovarne i multipli secondo 2, 3, 4,...*
4° *Dato un numero, trovarne i summultipli secondo 2, 3, 4,...*
5° *Dati due numeri diseguali, trovare quante volte il più piccolo si può togliere dal più grande e quanto avanza.*

Date le regole generali per risolvere coi numeri ordinari (frazioni) i problemi ora indicati, si possono *dedurre* le regole per risolvere i medesimi problemi, quando i dati sono frazioni decimali.

***

Occupiamoci ora del 6° problema (moltiplicazione in generale).

Abbiamo già veduto che prendere gli $\frac{n}{m}$ di una grandezza A significa, nel linguaggio comune, determinare la grandezza n volte più grande della grandezza m volte più piccola di A. Definendo allora prodotto di a per $\frac{n}{m}$ il numero che è gli $\frac{n}{m}$ di a (1) e indicando l'ope-

(1) Il sig. A. M. BUSTELLI in un suo pregevolissimo lavoro (*L'insegnamento dell'aritmetica e della geometria*, Lapi, Città di Castello), notando come negli ordinari trattati si definisca male, o non si definisca affatto, il significato dell'operazione moltiplicazione per i numeri frazionari, dedica a questa parte dell'aritmetica un lungo capitolo (IV, pag. 95), non risolvendo però, secondo me, ancora la questione nel modo più semplice possibile. Egli difatti, pur valendosi del concetto di frazione dedotto dai concetti di 2, 3, 4... volte più grande o più piccolo, fa dipendere la regola generale da almeno cinque casi distinti (apparentemente), perchè lascia il moltiplicatore una grandezza, mentre il moltiplicatore non può esser considerato che come numero. Esaminiamo p. e. questo problema: « Se un metro di una certa stoffa costa $^4/_5$ di lira, quante lire costano m. 7 $^3/_8$? » Ponendo 7 $^3/_8 = ^{59}/_8$ il ragionamento è semplice: Se 1 m. costa $^4/_5$ di lira, $^{59}/_8$ di metro costeranno i $^{59}/_8$ di quello che costa 1 m. cioè L. $^4/_5 \times ^{59}/_8 =$ L. 5,90. — Vediamo l'inverso: « Se m. 7 $^3/_8$ di una certa stoffa costano L. 5,90 quanto costerà un metro? » Posto al solito 7 $^3/_8 = ^{59}/_8$ il ragionamento può farsi così: Se quella stoffa è i $^{59}/_8$ di un metro, un metro è gli $^8/_{59}$ della lunghezza della stoffa, e poichè questa costa L. 5,90, $^8/_{59}$ di essa (un metro) costeranno gli $^8/_{59}$ di L. 5,90, cioè L. 5,90 $\times ^8/_{59} =$ L. $^4/_5$. Il sig. Bustelli risolverebbe assai diversamente i due problemi, e ciò perchè non considererebbe il numero 7 $^3/_8$, ma sempre la grandezza m 7 $^3/_8$, e ciò, notiamo bene, non effettivamente, perchè nelle varie parti del ragionamento verrebbe a sostituire, implicitamente, alla grandezza il numero (astratto) che la misura. I due problemi ora risoluti servono a provare quello che dico a pag. 41, relativamente alla divisione, che cioè essa può servire come elemento per dedurre regole generali, ma non appartiene ai concetti naturali che possono essere presi convenientemente come basi dei ragionamenti.

Anche un'altra considerazione può trovar posto in questa nota. Ho detto che nei dati dei problemi (pratici) compariscono delle grandezze misurate e dei numeri: solo raramente i dati sono numeri astratti, ma come tali

razione col segno ordinario $\times$ si ha per definizione $a \times \frac{n}{m} = (a : m) . n$ e il problema di cui ora ci occupiamo è la combinazione del 3° e 4° fondamentale. Si può osservare che non è assurdo chiamare moltiplicazione l'operazione necessaria per rendere un numero n volte più grande, poichè essa è un caso particolare dell'operazione generale che ora abbiamo definita.

L'operazione generale *divisione* è l'inversa della moltiplicazione (non l'operazione fondamentale 5ª) e si può definire il quoziente dicendo che è il numero che moltiplicato per il divisore dà per prodotto il dividendo. Indicando l'operazione col solito segno : è noto che

$$a : \frac{b}{c} = a \times \frac{c}{b} \cdot$$

Osservando che

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b} \times \frac{1}{n} = \frac{a}{b . n}$$

(essendo n intero) si deduce che si può adoperare il segno : anche per il problema 4° poichè l'operazione che lo risolve è un caso particolare della divisione.

Dalla definizione di divisione e dalla regola per risolvere il problema 3° si deduce che ogni numero è il quoziente della divisione del suo numeratore per il suo denominatore; e si deduce ancora che se $a = b . m + r$, essendo a, b, m, numeri interi e $r < b$, $\frac{a}{b} = m + \frac{r}{b}$ il che giustifica l'ordinario metodo di riduzione di un numero in decimali.

---

vengono ad esser considerati parte dei numeri che misurano le grandezze, dati del problema, dipendentemente dal fatto che essi esprimono sempre una relazione tra due grandezze, una delle quali è, o può esser considerata, unità di misura. Ciò è provato chiaramente dai ragionamenti dei due problemi precedenti. — Ordinariamente si considera il prodotto di due grandezze, senza pensare che la parola *prodotto*, nel senso che ha in aritmetica, non significa nulla portata nelle grandezze, ed è quindi naturale che in quasi tutti i trattati di aritmetica si trovino quelle regole empiriche sulla specie del prodotto o del quoziente rispetto al moltiplicando e al moltiplicatore o rispetto al dividendo e al divisore, regole empiriche non giustificabili scientificamente sotto nessun aspetto (a meno di fare convenzioni improprie), regole empiriche infine che snaturando il concetto dell'aritmetica rendono a poco per volta inabili i giovanetti a fare dei ragionamenti nei quali entri, sia pure timidamente, la logica.

***

Quando si vogliano fare i ragionamenti ai problemi elementari, servendosi delle locuzioni più volte citate appartenenti al linguaggio comune — il che mi pare assai conveniente — l'operazione moltiplicazione ha importanza e significato perchè permette di risolvere un problema che dipende da due fondamentali; l'operazione divisione non ha però alcun significato per i concetti comuni. Che ciò debba avvenire è naturale pensando che se A è gli $\frac{n}{m}$ di B, B è gli $\frac{m}{n}$ di A, e quindi col ragionamento si riporta alla moltiplicazione il problema della divisione precisamente come si fa anche con la regola. Quando però si introducono le proporzioni allora l'operazione divisione acquista la sua importanza, anzi diviene necessaria sia per definire la proporzione (numerica), sia per enunciare brevemente certe regole generali. Di più l'operazione divisione può esser utile per dare una regola pratica mediante la quale si può risolvere un problema con dati frazionari, quando si sappia risolvere il corrispondente problema con dati interi: difatti si può dire che quando nel problema a dati interi si deve rendere a n volte più grande o più piccolo, nel corrispondente problema, a dati frazionari, si deve moltiplicare o dividere il corrispondente di a per il corrispondente di n. Anche questa forma di ragionamento basata su di una regola, che può essere scientificamente dimostrata, è applicabile, ma mi pare preferibile l'altra che si basa sul significato di locuzioni del linguaggio comune, che sono quindi semplicemente intuite.

Non è neanche necessario che io osservi come nello stabilire i problemi fondamentali non abbia tenuto alcun conto delle proporzioni come mezzo di risoluzione di certi problemi. Ciò ho fatto perchè ho notato riuscire assai difficile ai giovanetti intendere l'intimo concetto di proporzione [1]. Abituandoli prima ad un ragionamento, che posso chiamare *naturale*, si svilupperanno le loro facoltà intellettuali e in seguito potranno essere introdotte, e con più frutto, le proporzioni, per le quali come ho già indicato si applicano le due operazioni generali moltiplicazione e divisione.

C. Burali-Forti.

---

(1) Anche a questo riguardo non divido le idee del sig. Bustelli (l. c.), e considero come una *stonatura didattica* — mi si passi la frase — l'introdurre le proporzioni nelle scuole elementari.

C. SEGRE

Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche.

Osservazioni dirette ai miei studenti (1).

I.

Lo CHASLES alla fine del suo *Aperçu historique* scriveva le seguenti parole:

« Dans la Géométrie ancienne les vérités étaient isolées; de nouvelles étaient difficiles à imaginer, à créer; et ne devenait pas géomètre inventeur qui voulait.

« Aujourd'hui chacun peut se présenter, prendre une vérité quelconque connue, et la soumettre aux divers principes généraux de transformation; il en retirera d'autres vérités, différentes ou plus générales; et celles-ci seront susceptibles de pareilles opérations; de sorte qu'on pourra multiplier, presque à l'infini, le nombre des vérités nouvelles déduites de la première: toutes, il est vrai, ne mériteront pas de voir le jour, mais un certain nombre d'entre elles pourront offrir de l'intérêt et conduire même à quelque chose de très-général.

« Peut donc qui voudra, dans l'état actuel de la science, généraliser et créer en Géométrie; le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice. »

Mezzo secolo è trascorso, ed in questo periodo la geometria ha fatto progressi immensi (2). Allo studio projettivo delle curve e superficie

(1) Aderendo alle gentili insistenze del Direttore di questa *Rivista* espongo qui, riunite e con alcune aggiunte, delle considerazioni che, staccatamente, ebbi già occasione di fare in iscuola a giovani laureandi in matematiche, e che mirano specialmente a mettere in guardia coloro i quali vogliono darsi alle ricerche scientifiche da certi difetti od errori in cui facilmente cadono i giovani, ed in particolare i giovani geometri. Tali considerazioni non sembrano inopportune ora che in Italia i giovani che si occupano di geometria sono assai numerosi. Ma per la loro natura e pel loro scopo *esse non possono presentare interesse o novità che per gli esordienti: solo per questi può riuscire non inutile il presente scritto.*

(2) Per farsi un'idea, anche solo approssimativa, della copia di ricerche che si son fatte in questo periodo, il giovane non ha che da dare uno sguardo alla Monografia storica del LORIA: *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche* (Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, t. 38).

algebriche dei primi ordini è seguita la teoria generale delle curve e superficie di qualunque ordine; coll'estensione del concetto di *elemento* geometrico si è fatta quella delle *varietà algebriche* e degli *spazi* in cui queste si considerano. Nuove specie di problemi si sono presentate. E le trasformazioni projettive a cui principalmente alludeva lo CHASLES si sono generalizzate con la nozione infinitamente più vasta delle *trasformazioni algebriche*.

Cresciute così a dismisura le ricerche geometriche e con esse i mezzi di trasformazione, crebbe in conseguenza proporzionalmente la facilità di cui parlava il grande geometra francese di moltiplicare senza fine le proposizioni nuove, di generalizzare e creare in geometria. E questa facilità, che, almeno in apparenza, è maggiore in questa scienza che non nell'analisi, nella fisica matematica, ecc., induce molti giovani, specialmente in Italia, a dare alla geometria la preferenza sugli altri rami delle matematiche, alcuni dei quali sono veramente negletti (ed è un gran male) dalla gioventù nostra.

Ma la facilità è una cattiva consigliera; e spesso i lavori a cui essa guida i giovani, se possono servire come esercizi, come preparazioni a ricerche originali, non meriterebbero però di veder la luce. Nella innumerevole copia di pubblicazioni scientifiche non sono rari i lavori geometrici in cui si cerca invano un'idea un po' nuova, un risultato che tosto o tardi possa servire, qualche cosa insomma che sia destinato a rimanere nella scienza; e si trovano invece trattate delle questioncelle o studiati degli enti speciali che non hanno alcuna utilità, alcuna importanza, che la loro origine derivano non dalla scienza stessa ma dal puro capriccio dell'autore; ovvero si trovano applicazioni già fatte migliaia di volte di noti metodi; o generalizzazioni di cose note così facili a farsi che basta la conoscenza di queste per darle subito; ecc., ecc. Ora siffatti lavori non solo riescono inutili per la scienza, ma le sono a dirittura dannosi, poichè producono in essa un vero ingombro, un disturbo pei ricercatori più seri; e sciupano qualche volta degli argomenti che pur potevano meritare di essere studiati. Meglio, molto meglio, che il giovane, anzi che produrre rapidamente una lunga serie di scritti di tal natura, si affatichi per molto tempo nella risoluzione anche di un sol problema, purchè questo sia importante: meglio un risultato atto a rimanere nella scienza che mille destinati a morire appena nati! [1].

---

[1] A giovani che aspirano alla laurea in matematiche si può ben dire schiettamente che la scienza non va considerata come una professione in cui tutti possano riescire: chè se è vero che per dare ad essa risultati utili non è più necessario il genio, pure un certo ingegno adatto alla sua natura ci vuole; e chi sa di non averlo deve, anche per quella venerazione e per

II.

Ma quand'è che una questione è *importante* e merita di formare oggetto di studio?

Non si può dare una risposta precisa a questa domanda. L'importanza di un argomento è molto relativa; è giudicata in vario modo dai vari uomini, e muta coi tempi e colle circostanze. È accaduto spesso di attribuire molta importanza ad un problema solo per le difficoltà che esso ha presentato; ed in fatti quando per ottenerne la soluzione si son dovuti escogitare nuovi mezzi, notevoli artifizi, ecc., la scienza avrà guadagnato, forse più con questi che col risultato finale. In generale si può dire che sono importanti tutte le ricerche relative ad enti che abbiano essi stessi importanza; quelle che hanno un gran carattere di generalità, o che riuniscono molte cose apparentemente distinte sotto un sol punto di vista, semplificando od illuminando; quelle che conducono a risultati da cui si prevede che scaturiranno numerose conseguenze; ecc., ecc.

Lo studio dei grandi scienziati è forse il miglior suggerimento che si possa dare al giovane che vuol imparare a giudicare dell'importanza degli argomenti. Poichè appunto nella scelta di questi i grandi ingegni son sempre stati maestri; ed anche quando si sono occupati di questioni molto particolari hanno mostrato bene in qual modo queste possano pure riuscire importanti. E qui anche a conferma di cose dette precedentemente, riporterò ancora le parole del BELTRAMI [1]: « Imparino i giovani ad educarsi di buon'ora sui capolavori dei grandi maestri, anzichè isterilire l'ingegno in perpetue esercitazioni da scuola che a nulla approdano, fuorchè a creare una nuova Arcadia, ove l'indolenza è velata sotto le forme dell'operosità... Coi forti studi sui grandi modelli si son fatti in ogni tempo i valenti; e con essi dee farsi la nostra nuova generazione scientifica, se vuol esser degna dei tempi a cui nacque e delle lotte a cui è destinata ».

In tali studi si deve tener presente questo altro criterio: *di allargare quanto si può la propria coltura*. Chi non si occupa di altri lavori che di quelli relativi al campicello che egli coltiva finisce col dare troppo

---

quell'abnegazione che appunto la scienza esige, rinunziare alle ricerche scientifiche. Perchè un giovane, che potrebbe forse insegnare ottimamente le matematiche elementari e studiare a fondo le numerose ed importanti questioni didattiche che in quell'insegnamento si presentano, dovrà trascurare tali studi, per fare invece delle ricerche di matematiche superiori che non sono adatte al suo ingegno?

(1) Giornale di matematiche, t. XI, p. 153.

peso a questioni che non montano affatto a chi, avendo maggiori cognizioni, considera le cose più dall'alto. Acquistare un punto di vista elevato rispetto a tutta la scienza: questo deve fare il giovane con un largo studio dei migliori lavori di ogni ramo di questa.

III.

In una lettera di JACOBI a LEGENDRE (2 luglio 1830) a proposito di un rapporto di POISSON sui *Fundamenta nova* è detto:

«... M. POISSON n'aurait pas dû reproduire dans son rapport une phrase peu adroite de feu M. FOURIER, où ce dernier nous fait des reproches, à ABEL et à moi, de ne pas nous être occupés de préférence du mouvement de la chaleur. Il est vrai que M. FOURIER avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde... »

Nessun dubbio si deve avere intorno a questo concetto di JACOBI: *alla scienza convien lasciare assolutamente la massima libertà;* e in particolare non si può punto imporle l'obbligo di tener sempre di mira le applicazioni pratiche.

Però nelle condizioni attuali delle ricerche matematiche in Italia, ora che fra i giovani matematici son pochissimi quelli che si occupano di meccanica, di fisica matematica, ecc., è opportuno ricordare le seguenti parole, pure giustissime, che appunto il FOURIER scriveva otto anni prima nel Discorso preliminare della *Théorie analytique de la chaleur:*

« L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue: elle est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même, et d'en découvrir les éléments qu' il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours conserver: ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels ».

È forse necessario citare esempi a conferma di ciò? ricordare come la maggior parte delle questioni matematiche, dalle più semplici alle più elevate, abbiano tratta la loro origine dalle applicazioni alla natura? come la teoria delle equazioni differenziali ordinarie, quella delle equazioni alle derivate parziali, le serie trigonometriche, varie nuove classi di funzioni che poi dovevano riuscire importantissime per l'Analisi,

tutte sian sorte od abbiano ricevuto continui eccitamenti dalla Fisica matematica o dalla Meccanica celeste? come la teoria del potenziale (e quindi l'elettrodinamica ecc.) si sia collegata in modo meraviglioso, specialmente per opera di RIEMANN (il degno successore di GAUSS e di DIRICHLET!) e dei suoi continuatori, alla teoria delle funzioni di una variabile complessa, ed in particolare delle funzioni algebriche e dei loro integrali, sì che uno di quelli, il KLEIN (1), potè ricorrere ad esperienze elettriche per mostrare l'esistenza dei vari integrali abeliani? O si deve ricordare quante volte allo studio delle coniche e delle quadriche si fu condotti da quello dei fenomeni naturali; o come il sistema nullo, ed il complesso e la congruenza lineare di rette ecc., si sian presentati nella meccanica dei corpi solidi, la quale poi dalla geometria della retta doveva ricevere in cambio (grazie specialmente a PLÜCKER, KLEIN e BALL (2)) aiuti straordinari? Dare un'idea, ancorchè pallida, dei modi svariatissimi con cui i problemi della natura hanno spinto le matematiche a progredire, sarebbe impossibile: come impossibile sarebbe l'enumerare tutti quei grandi (e ve ne sono tuttora sulla breccia) che han saputo collegare fra loro le più elevate ricerche di matematica pura colle applicazioni di questa alla fisica, all'astronomia, all'ingegneria, ecc.

I giovani che vogliono darsi alle ricerche scientifiche devono tener presenti quei fatti e questi esempi, e studiare le pure teorie in pari tempo colle loro applicazioni. E fra i tanti vantaggi che essi ne trarranno, vi sarà pur questo, che quando a loro mancasse ogni altro criterio per giudicare dell'importanza di un problema teorico da trattare, sempre rimarrà quello che è fornito dalle possibili applicazioni del problema stesso (le quali se, come già dicemmo, non son necessarie, certo però son sufficienti per giustificare una ricerca scientifica).

IV.

Ciò che s'è detto intorno alle relazioni fra le matematiche pure e quelle applicate va ripetuto in grado molto più elevato per le due principali suddivisioni delle matematiche pure: l'analisi e la geometria. Il metodo delle coordinate serve a passare dall'una all'altra e le collega intimamente, anzi le fonde insieme per modo che si può dire che ogni

---

(1) *Ueber* RIEMANN'*s Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale.* (Leipzig 1882).

(2) *The Theory of Screws* (Dublin 1876). V. anche la recente opera del GRAVELIUS: *Theoretische Mechanik starrer Systeme, auf Grund der Methoden und Arbeiten* BALL'*s* (Berlin 1889).

progresso dell'una produce un progresso dell'altra, e viceversa. Tutta la geometria differenziale sta a prova di ciò, ed in particolare le molteplici relazioni che essa stabilisce fra le equazioni differenziali e le curve, le superficie, i *connessi* introdotti dal CLEBSCH (1), ecc. E la teoria dei gruppi infiniti e continui di trasformazioni svolta in questi ultimi tempi dal LIE non ha solo prestato grandi servizi alla dottrina delle equazioni differenziali, ma ha altresì risolto notevoli problemi geometrici, illuminando ad esempio di nuova luce quello dei fondamenti della geometria (2). La geometria degli enti *algebrici* coincide, come mostra la stessa denominazione e la definizione di questi enti (3), coll'analisi delle funzioni algebriche e delle funzioni trascendenti affini a queste: così la geometria projettiva equivale alla moderna algebra delle trasformazioni lineari (delle forme invariative), ecc. E la teoria delle equazioni algebriche e dei gruppi di sostituzioni illumina vari importanti problemi di geometria e ne trae essa stessa utili rappresentazioni e suggerimenti (4). Ecc., ecc. (5).

Questa multiplicità di legami fra l'analisi e la geometria e la necessità che ne consegue di studiarle entrambe e di non limitarsi ad uno solo dei due indirizzi, analitico e sintetico, è sempre stata riconosciuta dai grandi matematici. Su essa ad esempio insistevano in pari tempo LAGRANGE e MONGE nelle loro lezioni analitiche e geometriche alla Scuola normale (1795); e quest'ultimo nella sua *Géométrie descriptive* scriveva le seguenti parole, che evidentemente si possono applicare a tutta quanta la geometria:

---

(1) A proposito delle ricerche di questo grande geometra su quegli enti i suoi biografi osservano (Math. Ann. VII, p. 50): « Er hat mit ihnen dem Grundzuge seiner mathematischen Denkweise noch einmal Ausdruck gegeben, welche *die Mathematik nicht als eine Reihe geschiedener, einander fremder Disciplinen, sondern als einen lebendigen Organismus* erfassen wollte. »

(2) V. POINCARÉ, *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie* (Bull. Soc. math. de France, t. XV, 1887); e specialmente LIE, *Ueber die Grundlagen der Geometrie* (Berichte der k. sächs. Ges. d. W. Leipzig, 1890).

(3) Una varietà si dice *algebrica* quando i suoi elementi sono tutti quelli aventi le coordinate espresse da funzioni algebriche date di uno o più parametri variabili indipendenti. Sotto questa definizione si può far rientrare anche la nozione di corrispondenze algebriche.

(4) V. ad esempio il Cap.° sulle applicazioni geometriche nel *Traité des substitutions et des équations algébriques* del JORDAN.

(5) Si confronti anche il Programma del KLEIN: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen 1872) (tradotto in italiano dal sig. FANO nel vol. XVII, serie 2ª, degli Annali di matematica).

« ... Ce n'est pas sans objet que nous comparons ici la Géométrie descriptive à l'Algèbre; ces deux sciences ont les rapports les plus intimes. Il n'y a aucune construction de Géométrie descriptive qui ne puisse être traduite en Analyse; et lorsque les questions ne comportent pas plus de trois inconnues (1), chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectacle en Géométrie.

« *Il serait à desirer que ces deux sciences fussent cultivées ensemble:* la Géométrie descriptive porterait dans les opérations analytiques les plus compliquées, l'évidence qui est son caractère; et, à son tour, l'Analyse porterait dans la Géométrie la généralité qui lui est propre ».

Ed in tempi molto più prossimi a noi il CLEBSCH intorno a quei due indirizzi scriveva (2):

« *Beide zusammen umfassen erst in Verein und Ergänzung das Ganze mathematischer Forschung, und es vermag keine von beiden auf die Dauer ohne schwere Schädigung ihres eigensten Wesens die Begleitung und den Einfluss der andern zu entbehren* ».

E gli stessi concetti propugna nelle sue lezioni ed illustra col proprio esempio uno dei più valenti maestri che ora vanti la Germania, il KLEIN; sì che tutta la scuola che da lui deriva dimostra nel miglior modo di possedere in pari tempo le cognizioni e gli strumenti analitici e quelli geometrici.

In Italia pur troppo la cosa è ben diversa: la separazione delle matematiche pure in Analisi e Geometria è fatta dai giovani in modo così netto (3) che di ben pochi fra essi si può dire che vadano studiando e coltivando l'una e l'altra. Vi sono dei giovani analisti e dei giovani geometri; ma dei giovani che considerino la matematica tutta come il loro campo, seguendo i grandi esempi che noi pure abbiamo, ve ne son pochissimi. Ond'è che nel rivolgermi ai miei studenti di Geometria io sento il dover di raccomandar loro col massimo calore lo studio dell'Analisi. Un giovane che voglia oggidì coltivare la Geometria staccandola nettamente dall'Analisi, non tenendo conto dei progressi che questa

---

(1) Questa restrizione può esser tolta mediante l'uso di varietà n volte estese. Su queste ritornerò nel seguito.

(2) *Zum Gedächtniss an Julius Plücker* (Abhandl. der k. Ges. d. W. zu Göttingen, Bd. 16, 1871); tradotto in italiano dal Prof. BELTRAMI nel volume XI del Giornale di matematiche. — Si confronti questo brano con quello della biografia di CLEBSCH citato in una nota precedente.

(3) Bisogna confessare che essi la vedono già fatta in tal modo nell'elenco delle materie che s'insegnano nelle Università: son messe in opposizione la *geometria projettiva* e la *geometria analitica!* l'*analisi superiore* e la *geometria superiore!*

ha fatto e va facendo, quel giovane, dico, per quanto grande abbia l'ingegno, non sarà mai un geometra completo [1]. Egli non possiederà quei potenti strumenti di ricerca che alla moderna geometria fornisce l'analisi moderna. Egli ignorerà vari risultati geometrici che si trovano, magari implicitamente, negli scritti degli analisti. E non solo non potrà valersene nelle sue proprie ricerche; ma gli accadrà di faticare per ritrovarli egli stesso, e, caso molto frequente, di presentarli poi come nuovi quando sia riuscito a ritrovarli.

Dopo le citazioni già fatte sembra inutile l'addurre nuovi esempi in appoggio di questi concetti. Ma uno ve n'è ancora che mi piace citare, perchè istruttivo in sommo grado: *la geometria su una curva algebrica*. Il concetto di questa geometria, cioè di proprietà dell'ente algebrico invariabili per trasformazioni razionali dell'ente stesso, si trova per la prima volta in un lavoro analitico: nella grande memoria di Riemann sulla *Teoria delle funzioni Abeliane*. È quì che viene usata la prima volta la nozione del *genere* (contenuta solo implicitamente nella Memoria capitale di Abel sulle sue trascendenti) e dimostrata l'invariabilità di esso per tali trasformazioni. È quì che si trova quella rappresentazione di una funzione algebrica come somma d'integrali abeliani di 2ª specie, che (grazie anche al Roch che completò il calcolo di Riemann) ha dato uno dei più importanti e fecondi teoremi alla geometria moderna. È quì infine che si trovano tante proposizioni notevoli, alcune delle quali, messe sotto veste geometrica, possono ancora sembrar nuove ai giovani geometri che non abbiano ben meditato su quel profondo immortale lavoro. E nuovi risultati per la geometria sulla curva si son trovati nelle Lezioni di Weierstrass sulle funzioni abeliane. E per tutta quanta la geometria delle curve algebriche le ricerche analitiche sulle funzioni algebriche e sui loro integrali hanno avuto applicazioni importantissime: basti ricordare in proposito il teorema di Abel (« il ponte naturale, come fu chiamato, fra il lato algebrico e quello trascendente della detta teoria ») ed il problema d'inversione che ad esso si collega, e le applicazioni geometriche che il Clebsch insegnò a fare di entrambi. Nè l'influenza di Riemann sulle applicazioni dell'analisi alla geometria s'è limitata a ciò. È da essa che in grado diverso si possono considerare come derivate varie nuove classi di trascendenti che ora si vanno costruendo e studiando accanto a quelle abeliane. E così il Poincaré diede le espressioni di certe funzioni analitiche uniformi di una variabile, che egli chiamò *funzioni Fuchsiane*, mediante le quali mostrò ad esprimere le coordinate dei punti di una

[1] Si pensi che « *geometra* » nel senso più largo della parola è sinonimo di « *matematico* » !

«... Ce n'est pas sans objet que nous comparons ici la Géométrie descriptive à l'Algèbre; ces deux sciences ont les rapports les plus intimes. Il n'y a aucune construction de Géométrie descriptive qui ne puisse être traduite en Analyse; et lorsque les questions ne comportent pas plus de trois inconnues (1), chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectacle en Géométrie.

« *Il serait à desirer que ces deux sciences fussent cultivées ensemble:* la Géométrie descriptive porterait dans les opérations analytiques les plus compliquées, l'évidence qui est son caractère; et, à son tour, l'Analyse porterait dans la Géométrie la généralité qui lui est propre ».

Ed in tempi molto più prossimi a noi il Clebsch intorno a quei due indirizzi scriveva (2):

« *Beide zusammen umfassen erst in Verein und Ergänzung das Ganze mathematischer Forschung, und es vermag keine von beiden auf die Dauer ohne schwere Schädigung ihres eigensten Wesens die Begleitung und den Einfluss der andern zu entbehren* ».

E gli stessi concetti propugna nelle sue lezioni ed illustra col proprio esempio uno dei più valenti maestri che ora vanti la Germania, il Klein; sì che tutta la scuola che da lui deriva dimostra nel miglior modo di possedere in pari tempo le cognizioni e gli strumenti analitici e quelli geometrici.

In Italia pur troppo la cosa è ben diversa: la separazione delle matematiche pure in Analisi e Geometria è fatta dai giovani in modo così netto (3) che di ben pochi fra essi si può dire che vadano studiando e coltivando l'una e l'altra. Vi sono dei giovani analisti e dei giovani geometri; ma dei giovani che considerino la matematica tutta come il loro campo, seguendo i grandi esempi che noi pure abbiamo, ve ne son pochissimi. Ond'è che nel rivolgermi ai miei studenti di Geometria io sento il dover di raccomandar loro col massimo calore lo studio dell'Analisi. Un giovane che voglia oggidì coltivare la Geometria staccandola nettamente dall'Analisi, non tenendo conto dei progressi che questa

(1) Questa restrizione può esser tolta mediante l'uso di varietà n volte estese. Su queste ritornerò nel seguito.

(2) *Zum Gedächtniss an Julius Plücker* (Abhandl. der k. Ges. d. W. zu Göttingen, Bd. 16, 1871); tradotto in italiano dal Prof. Beltrami nel volume XI del Giornale di matematiche. — Si confronti questo brano con quello della biografia di Clebsch citato in una nota precedente.

(3) Bisogna confessare che essi la vedono già fatta in tal modo nell'elenco delle materie che s'insegnano nelle Università: son messe in opposizione la *geometria projettiva* e la *geometria analitica!* l'*analisi superiore* e la *geometria superiore!*

ha fatto e va facendo, quel giovane, dico, per quanto grande abbia l'ingegno, non sarà mai un geometra completo [1]. Egli non possiederà quei potenti strumenti di ricerca che alla moderna geometria fornisce l'analisi moderna. Egli ignorerà vari risultati geometrici che si trovano, magari implicitamente, negli scritti degli analisti. E non solo non potrà valersene nelle sue proprie ricerche; ma gli accadrà di faticare per ritrovarli egli stesso, e, caso molto frequente, di presentarli poi come nuovi quando sia riuscito a ritrovarli.

Dopo le citazioni già fatte sembra inutile l'addurre nuovi esempi in appoggio di questi concetti. Ma uno ve n'è ancora che mi piace citare, perchè istruttivo in sommo grado: *la geometria su una curva algebrica*. Il concetto di questa geometria, cioè di proprietà dell'ente algebrico invariabili per trasformazioni razionali dell'ente stesso, si trova per la prima volta in un lavoro analitico: nella grande memoria di Riemann sulla *Teoria delle funzioni Abeliane*. È quì che viene usata la prima volta la nozione del *genere* (contenuta solo implicitamente nella Memoria capitale di Abel sulle sue trascendenti) e dimostrata l'invariabilità di esso per tali trasformazioni. È quì che si trova quella rappresentazione di una funzione algebrica come somma d'integrali abeliani di 2ª specie, che (grazie anche al Roch che completò il calcolo di Riemann) ha dato uno dei più importanti e fecondi teoremi alla geometria moderna. È quì infine che si trovano tante proposizioni notevoli, alcune delle quali, messe sotto veste geometrica, possono ancora sembrar nuove ai giovani geometri che non abbiano ben meditato su quel profondo immortale lavoro. E nuovi risultati per la geometria sulla curva si son trovati nelle Lezioni di Weierstrass sulle funzioni abeliane. E per tutta quanta la geometria delle curve algebriche le ricerche analitiche sulle funzioni algebriche e sui loro integrali hanno avuto applicazioni importantissime: basti ricordare in proposito il teorema di Abel (« il ponte naturale, come fu chiamato, fra il lato algebrico e quello trascendente della detta teoria ») ed il problema d'inversione che ad esso si collega, e le applicazioni geometriche che il Clebsch insegnò a fare di entrambi. Nè l'influenza di Riemann sulle applicazioni dell'analisi alla geometria s'è limitata a ciò. È da essa che in grado diverso si possono considerare come derivate varie nuove classi di trascendenti che ora si vanno costruendo e studiando accanto a quelle abeliane. E così il Poincaré diede le espressioni di certe funzioni analitiche uniformi di una variabile, che egli chiamò *funzioni Fuchsiane*, mediante le quali mostrò ad esprimere le coordinate dei punti di una

(1) Si pensi che « *geometra* » nel senso più largo della parola è sinonimo di « *matematico* »!

curva algebrica qualunque. E di questa rappresentazione si son già fatte applicazioni allo studio della curva (1); ma converrebbe ricercare se non se ne possano fare ancora delle altre. Quelle funzioni rientrano nel concetto generale delle funzioni *linearmente automorfe,* come le chiama il KLEIN, cioè delle funzioni di una variabile che non mutano valore per un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni lineari di questa (2). Varrebbe la pena che i giovani geometri penetrassero nel vasto campo che queste, ed altre funzioni, sì di una che di più variabili, che ogni giorno si vanno introducendo, aprono agli studi: poichè è certo che, quando pure essi volessero sempre limitarsi a scopi geometrici, le cognizioni analitiche che così acquisterebbero verrebbero ad essere per loro della massima utilità, e forse a dar la chiave per la risoluzione di problemi geometrici difficilissimi.

V.

Qui è opportuno mettere a riscontro delle ultime considerazioni quelle che si posson fare intorno all'uso del *metodo sintetico puro* nelle ricerche geometriche.

Nel progresso di un ente qual si sia, di un organismo vivente, come di una società, o di una scienza, si notano fra le altre due tendenze: l'una a formarsi differenze sempre più spiccate nella struttura e nelle funzioni delle varie parti, l'altra ad una connessione o dipendenza sempre maggiore fra queste (3). Ne segue che il progredire delle scienze, mentre da un lato le moltiplica di numero, facendo di teorie che prima si confondevano in una sola scienza, tante scienze distinte, da un altro lato aumenta continuamente i legami fra queste ed i mutui aiuti che esse possono recarsi (4).

---

(1) V. ad esempio: HUMBERT, *Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques* (Journal de mathém., 1886).

(2) V., accanto ai lavori speciali del POINCARÉ (nei primi volumi degli Acta mathematica), i *Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie* del KLEIN (nel vol. XXI dei Math. Annalen).

(3) O, come dice lo SPENCER nella sua formola generale dell'*evoluzione* (*Primi principii*), questa fa passare l'ente da una omogeneità indefinita, incoerente, ad una eterogeneità definita, coerente.

(4) Di qui deriva la difficoltà più grave forse che incontri oggidì lo studioso: quella di conciliare la divisione del lavoro, resasi inevitabile pel grande sviluppo preso dalle scienze, con la necessità di seguire i progressi di parecchie fra queste, che tutte si collegano intimamente fra loro. Sventuratamente son pochi coloro a cui l'ingegno e le condizioni fisiche consentano di far ciò in modo pienamente soddisfacente. Chi è giovane adoperi

È così che fra i grandi progressi fatti dalle matematiche in questo secolo, accanto alle nuove e rilevanti relazioni ed applicazioni stabilitesi fra esse ed in particolare fra l'analisi e la geometria, va segnalata la purificazione, per così dire, di queste scienze, cioè la formazione di una analisi che tutta si basa sulla sola nozione di numero, senza più esigere considerazioni geometriche (o meccaniche), e quella di una geometria projettiva che non si vale di coordinate ed anzi evita completamente i numeri nelle proprietà di posizione.

Questi indirizzi *puri* sono veramente della massima importanza. È in fatti fuor di dubbio che il matematico non può esser pienamente soddisfatto della conoscenza di una verità se non quando è riuscito a dedurla colla massima semplicità e naturalezza dal minor numero possibile di proposizioni note, di postulati indipendenti, evitando ogni ipotesi, ogni mezzo di dimostrazione che non appaia necessario per lo scopo. Così facendo si raggiungono spesso coi vantaggi scientifici anche vantaggi didattici, in quanto che dallo studioso si esigerà minor copia di cognizioni preliminari. Oltre a ciò va notato come un fatto generale, che quando nelle ricerche si adopera un solo strumento, vietandosi espressamente l'uso di ogni altro, si è spesso condotti ad affinare ed a perfezionare quello usato, rendendolo così sempre più adatto a nuove scoperte. E fu per tal modo che il metodo sintetico, perfezionatosi nei grandi lavori con cui si formò la geometria moderna, riportò trionfi notevolissimi che dimostrarono appunto i vantaggi che spesso si hanno dall'uso prolungato di esso.

Ma in quest'ordine d'idee il giovane deve guardarsi bene dall'esagerazione. Il periodo, dirò così, eroico della geometria sintetica, nel quale non si trattava solo di dare alla scienza nuovi risultati, ma, da Poncelet a Steiner, da Chasles a Staudt, tutti dovevano combattere per dimostrare l'utilità del metodo geometrico agli analisti che non volevano riconoscerla, quel periodo è passato (1); ed oggidì la lotta non è più necessaria. Che uno si occupi di stabilire per via sintetica dei risultati a cui già altri giunsero analiticamente è spesso una cosa utilissima, per le ragioni accennate or ora: ma il giovane deve scegliere

---

tutte le sue forze per avvicinarsi quanto è possibile alla coltura scientifica di cui io parlo: sono gli studi fatti da giovane quelli che lasciano un'impressione più profonda nella mente!

(1) E sembra giunto il momento opportuno per scriverne la storia! — Dallo studio dei grandi geometri qualche giovane dovrebbe sentirsi spinto a ricercare ed a narrare in qual modo e per opera di chi si siano ottenuti i più importanti progressi della geometria moderna. Una storia particolareggiata di questi progressi costituirebbe un lavoro sommamente interessante!

per far ciò argomenti che presentino un'importanza particolare e notevoli difficoltà; e deve poi sempre, a parità di queste condizioni, dar la preferenza alla ricerca di verità completamente nuove, e non diventare un semplice traduttore di scritti analitici in sintetici. E nel fare una ricerca originale non si creda sempre obbligato di attenersi al metodo puramente geometrico: poichè infine alla scienza quel che più importa sono i risultati (ove non si tratti di creare metodi nuovi), e sarebbe follìa l'evitare certe questioni geometriche solo perchè nello stato attuale della scienza esse non si sanno trattare senza strumenti analitici. Crearsi *artificialmente* delle difficoltà, se giova ad aguzzare l'ingegno e può quindi esser qualche volta utile, non è però un procedimento da seguirsi in generale da chi ha per mira principale il progresso della scienza (1). Per ogni ricerca si scelga liberamente il metodo che sembra più opportuno; spesso converrà alternare fra loro il metodo sintetico che appare più penetrante, più luminoso, e quello analitico che in molti casi è più potente, più generale, o più rigoroso; e parecchie volte accadrà pure che uno stesso argomento non sarà bene illuminato sotto ogni aspetto se non sarà trattato con ambo i metodi (2). Certamente anche qui le tendenze individuali si faranno sentire e uno stesso tema parrà più adatto alla trattazione sintetica agli uni, a quella analitica agli altri: così STEINER e CREMONA giungevano sinteticamente a certi risultati nello stesso tempo che SYLVESTER e CLEBSCH vi giungevano analiticamente! Ma quel che importa sovratutto è che il giovane non sia schiavo del metodo e che si metta in grado di valersi di qualunque strumento per giungere ad un risultato importante.

---

(1) Ad esempio, dopo che lo STAUDT ci ha dato una teoria geometrica completa degli elementi imaginari, dimostrando come per essi valgano tutte le proprietà fondamentali della geometria projettiva, non vi è più ragione di volere, nelle ricerche scientifiche (non parlo di quelle essenzialmente didattiche) su questo campo, escludere l'uso degli elementi imaginari, e neppure di volerli introdurre solo a *coppie* (di elementi imaginari coniugati). — S'intende che qui, come sempre, parlo in massima generale, ammettendo le debite eccezioni.

(2) È perciò che, nello stato attuale della scienza, mi sembrano *in generale* preferibili quei trattati (o quei corsi) in cui un argomento è svolto con varietà di metodi a quelli in cui si adopera un metodo unico: così le curve, superficie, ecc., algebriche mi pare opportuno siano spiegate ai giovani tanto analiticamente quanto sinteticamente, alternando in generale i due metodi a seconda delle questioni.

VI.

Allo stesso modo come, allorquando si tratta solo di scoprire una verità, la purezza del metodo passa in seconda linea, così accade spesso che in una prima ricerca si debba sacrificare (sacrifizio molto più grave, trattandosi di matematica!) il rigore ([1]). Soventi volte la verità scientifica appare come collocata su una vetta eccelsa e per raggiungerla non si hanno dapprima che sentieri malagevoli su chine pericolose, sì che vi è gran facilità di precipitare negli abissi in cui sta l'errore: soltanto dopo che alla vetta si è giunti per siffatti sentieri, si riesce a tracciare delle strade sicure che conducano ad essa senza pericoli. Così è avvenuto frequentemente che il primo modo di giungere ad una verità non sia stato pienamente soddisfacente, e che solo *dopo* la scienza sia riuscita a completarne la dimostrazione. Certamente anche qui il matematico non potrà essere veramente contento quando ad un nuovo risultato sia giunto con procedimenti poco rigorosi: egli non si considererà come sicuro di quello finchè non l'avrà rigorosamente dimostrato. Ma non rigetterà senz'altro quei procedimenti incompleti nelle ricerche difficili in cui non possa sostituirli meglio: poichè la storia della scienza lo ammaestra appunto sull'utilità che tali metodi hanno sempre avuto.

Ad esempio l'introduzione degli elementi imaginari e di quelli all'infinito in Geometria riuscì utilissima anche prima che essa fosse giustificata con una logica perfetta. E Poncelet, che insegnò a valersi con grande vantaggio del principio di continuità per le proprietà delle figure geometriche, non riuscì certo a stabilirlo in modo rigoroso, malgrado le molte pagine che scrisse per questo scopo ([2]). Similmente in varie ricerche, specialmente sintetiche, sulle curve e le superficie, si è

([1]) Non si confonda la deficienza di rigore nei procedimenti con l'errore nei ragionamenti o nei risultati. Pur troppo anche l'errore s'incontra assai spesso oggidì nei lavori scientifici ed è causato generalmente dalla fretta con cui questi son fatti: sicchè convien raccomandare ai giovani di non avere soverchia fretta di pubblicare le loro cose! Ma la questione del rigore, di cui sopra discorro, è ben diversa.

([2]) V. specialmente le *Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les lois géométriques* nel 2° volume delle *Applications d'Analyse et de Géométrie;* ed il *Traité des propriétés projectives des figures.* — Dall'Introduzione di questo trattato riporto il seguente brano che si collega a quanto sopra diciamo:

« N'est-il pas, pour le moins, aussi nécessaire d'enseigner les ressources employées, à diverses époques, par les hommes de génie, pour parvenir à la vérité, que les efforts pénibles qu'ils ont été ensuite obligés de faire

approfittato molto di considerazioni su punti infinitamente vicini, o consecutivi, sulle tangenti, sui punti r-pli come intersezioni di r rami o falde, ecc., ecc., le quali erano ben lungi dall'essere rigorose, almeno in generale e nel modo com'erano presentate. Lo stesso si può dire di parecchi procedimenti della *geometria numerativa* (¹) (ai quali si posson collegare gli ultimi esempi citati), come il principio dell'enumerazione delle costanti, e specialmente quello dell'invariabilità del numero, nelle cui applicazioni si ammette spesso, senza una dimostrazione completa, che il numero cercato dipenda solo da certi altri, e però non muti (o diventi infinito) se questi non mutano: metodi che hanno condotto valenti scienziati, come il JONQUIÈRES (²), lo SCHUBERT ed altri, a risultati splendidi, fra cui molti ai quali la scienza attualmente ancora non saprebbe giungere per una via più rigorosa (³). Infine ricorderò che talvolta si è persino avuto ricorso a disegni o modelli di figure geometriche per *vedere* certe proprietà (specialmente di forma o di realtà) che col solo ragionamento deduttivo non si sapevano ottenere (⁴).

Ora nel fare uso di simili mezzi d'investigazione il giovane deve badare che quì, come nelle salite difficili su erte pericolose, per non cadere nell'abisso o nell'errore ci vuol destrezza, prudenza e pratica.

---

pour les démontrer selon le goût des esprits ou timides ou peu capables de se mettre à leur portée?

« Enfin, quel mal pourrait-il en résulter, surtout si l'on se montrait sévère à conclure, si l'on ne se payait jamais de demi-aperçus, si l'on n'admettait jamais l'*analogie* et l'*induction*, qui sont souvent trompeuses...? »

(¹) V. l'opera importantissima dello SCHUBERT: *Kalkül der abzählenden Geometrie* (Leipzig 1879), in cui questi procedimenti sono riuniti ed adoperati sistematicamente.

(²) V. per esempio la determinazione del numero dei gruppi, di una serie lineare di gruppi di punti di una curva, i quali hanno dei punti con date multiplicità: determinazione contenuta in sostanza nel *Mémoire sur les contacts multiples des courbes de degré* r, *qui satisfont à des conditions données, avec une courbe fixe etc.*, del DE JONQUIÈRES, Crelle's Journal, t. 66 (1866).

(³) Rivolgendomi a giovani, mi piace citare fra i più importanti risultati così raggiunti quello ottenuto recentemente da un giovane, cioè il numero delle serie lineari di dati indici sopra una curva di dato genere (v. due Note del CASTELNUOVO nei Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, estate 1889).

(⁴) E vi sono altri casi in cui a risultati spettanti alla matematica si giunse valendosi della fisica. Anche ciò è permesso: s'intende in questo senso, che il risultato così conseguito, pur essendo ancora *scientifico* (fisico), non sarà però *matematico*, non avrà che un valore relativo ed approssimato; ma preparerà la via al risultato matematico, cioè a quello che sarà stabilito con una completa deduzione matematica.

E dopo essersi valso colla massima cautela di quei mezzi per le sue scoperte deve cercare se non gli riesce di sostituirli con dimostrazioni sicure. Ma, come già dissi, io non credo che egli debba rinunziare ad occuparsi di una ricerca o ad esporre un suo risultato, perciò solo che egli non può procedere con metodi perfettamente rigorosi. La massima prudenza, ripeto ancora, il massimo numero di controlli, ecc., ecc., ci vogliono per non cadere nell'errore; anche in ciò gioverà l'esempio degli scienziati di valore, per insegnare quando è che nel risultato ottenuto si può aver fiducia: ma allora sarà opportuno farlo conoscere. Solo bisognerà alla prudenza congiungere *l'onestà*, cioè avvertire espressamente come la via tenuta non sia scevra di dubbi, affinchè nessuno sia indotto a fidarsi ciecamente del risultato, ma anzi vi sia un invito a cercarne una più completa dimostrazione (1).

VII.

Abbiamo accennato fin dal principio di queste considerazioni, valendoci anche delle parole di CHASLES, sì all'estensione ed all'importanza capitale che nella geometria delle varietà algebriche hanno le corrispondenze o trasformazioni algebriche, sì ancora alla facilità con cui mediante queste si ottengono dei nuovi enti e delle nuove proposizioni.

Quanto all'importanza, la si può considerare specialmente sotto tre diversi aspetti, corrispondentemente ai tre seguenti uffici delle corrispondenze stesse: 1° quello di caratterizzare certi indirizzi geometrici (2): così si ha una geometria projettiva, in cui il gruppo di trasformazioni posto a base è quello costituito dalle projettività; una geometria delle trasformazioni birazionali od univoche, cioè la geometria delle trasfor-

---

(1) Fra le trascuranze che spesso si devon fare in una prima scoperta di nuovi fatti va rilevata ancora quella dei casi d'eccezione. Accade frequentemente di dire che una proposizione è vera *in generale*, senza spiegare che cosa s'intenda con ciò, quali siano le *eccezioni*. Naturalmente anche qui viene a mancare quella esattezza che è il più gran pregio della matematica. Nella geometria degli enti algebrici si può dare un significato abbastanza preciso alla locuzione « *in generale* »: s'intende allora che le *eccezioni* hanno luogo solo per quegli enti le cui coordinate (o parametri da cui essi dipendono algebricamente) soddisfano a certe equazioni algebriche non identiche. Se si possono assegnare precisamente queste equazioni, cioè le condizioni che caratterizzano i casi eccezionali, si sarà raggiunto completamente le scopo del matematico. Ma sovente avviene di doversi accontentare di quell'affermazione generica.

(2) V. il Programma già citato del KLEIN.

mazioni birazionali del piano o dello spazio ecc., la geometria *sulla curva* (che mediante considerazioni funzionali si rispecchia nella geometria delle trasformazioni conformi delle superficie), la geometria *sulla superficie*, ecc. 2° trasformare enti di cui son note le proprietà in enti di cui si vengono così ad avere nuove proprietà. 3° generare nuove varietà, valendosi di corrispondenze algebriche fra date forme, come luoghi degli elementi uniti, ovvero luoghi delle intersezioni o delle congiungenti di elementi omologhi, ecc., ecc.

Il 2° di questi scopi è suggerito dal 1°, allorquando volendo studiare le proprietà di un ente secondo un certo indirizzo, cioè le proprietà che non mutano per una certa classe di trasformazioni geometriche, si applicano queste a semplificare l'ente sì da renderne più facile lo studio. Ciò si fa, a mo' d'esempio, nel metodo della projezione centrale usato in geometria projettiva; o quando per studiare la geometria su una curva si adoperano certe curve *normali;* o quando le proprietà dei sistemi lineari di curve di un piano (nella geometria delle trasformazioni birazionali del piano) si deducono da quelle dei sistemi lineari d'ordine minimo. Però se si confronta il *Traité des propriétés projectives des figures* del PONCELET coi trattati posteriori, ad esempio colla *Geometrie der Lage* dello STAUDT [1], si vede come l'importanza di quel metodo di dimostrazione nella Geometria projettiva sia diminuita, e come si sia preferito di studiare direttamente l'ente anzi che studiarne prima un caso particolare per poi dedurne quello generale con trasformazioni projettive. E qualche cosa d'analogo si può già notare anche per certe questioni di geometria delle trasformazioni univoche, ecc.

Ciò non significa punto che le trasformazioni perdano in qualche guisa importanza: lungi da ciò! È solo il modo di applicarle che muta. Certo che, per esempio, lo studio di *particolari* curve e superficie razionali mediante la rappresentazione parametrica, ossia la rappresentazione sulla retta o sul piano, e così pure lo studio di *particolari* corrispondenze univoche fra due piani o due spazi, non hanno più attualmente quell'interesse che avevano una ventina d'anni fa. Allora essi conducevano a considerare nuovi enti e nuovi problemi interessantissimi, ed i migliori geometri vi si rivolgevano con frutto. Oggidì il moltiplicare le applicazioni dei metodi che allora furono escogitati ha in generale un'importanza secondaria, a meno che si tratti di casi eccezionali presentanti nuove difficoltà. Dato il sistema lineare di curve piane rappresentativo di una superficie, o dato il sistema omaloidico di curve o superficie che definisce una trasformazione birazionale del piano o dello spazio, ecc., non è più in molti casi che un semplice esercizio da

(1) Tradotta in italiano dal PIERI (Torino, Bocca, 1889).

scuola il dedurne le proprietà della superficie o della trasformazione birazionale, ecc. E così in generale, com'è facile immaginare dei nuovi luoghi e delle nuove trasformazioni geometriche, altrettanto è facile inventare delle applicazioni delle corrispondenze per ottenere nuove verità. Si prende un punto A, lo si congiunge con B, si prende la polare rispetto a C, s'interseca con D, si determina l'omologo rispetto ad E, ecc., ecc., ed infine da A si sarà ottenuto un punto (od altro elemento) A': ai tali elementi corrisponderanno così i tali altri, e se A od A' si muove nel tal modo, A' od A si muoverà pure, ecc., ecc. In questa guisa un dato ente, o una data proprietà, si trasformerà in un altro, che ne darà un terzo, e così via; e tutto ciò senz'alcuna difficoltà, quasi meccanicamente, colla regolarità con cui un pendolo fa le sue oscillazioni [1].

Ora, anche rimanendo nel campo delle corrispondenze algebriche, non è di questa specie di ricerche che conviene principalmente occuparsi oggidì. Ben altre questioni vi sono di maggior momento! La teoria delle trasformazioni birazionali dello spazio aspetta che qualcuno affronti certi problemi generali e d'importanza capitale, i cui analoghi pel piano furon già risolti. Essa aspetta di essere applicata alla grave questione della riduzione delle singolarità superiori delle curve sghembe e delle superficie, non che allo studio dei sistemi lineari di superficie, ecc. È ancora da farsi la teoria delle corrispondenze multiple fra due piani o fra due spazi. Lo studio delle corrispondenze algebriche fra curve (distinte o sovrapposte) è lungi dall'essere completo. E quello delle corrispondenze fra due superficie si può dire (malgrado un recente lavoro di un valente matematico francese) che è ancora da cominciare. In tutti questi campi si trovano delle questioni vitalissime alle quali deve rivolgersi il giovane molto più che alle esercitazioni dianzi citate.

Anche nell'applicazione delle corrispondenze algebriche alla generazione di luoghi geometrici si son trovati e si posson ancora trovare risultati importanti. Ma bisogna che quelle corrispondenze siano scelte in modo da condurre a luoghi interessanti o per la loro generalità o per circostanze speciali. Si badi inoltre che spesso la determinazione dei vari caratteri (ordine, classe, punti multipli, ecc.) degli enti così generati non presenta novità o difficoltà alcuna, poichè si ottiene con procedimenti enumerativi notissimi. La ricerca non deve dunque ridursi solo a tale determinazione; ma deve comprendere l'esame di tutte le particolarità dei luoghi ottenuti, fino a risolvere la questione inversa, cioè a stabilire quali sono tutti gli enti generabili a quel modo.

---

(1) Onde un mio maestro (dal quale io stesso ho ricevuto parecchi dei consigli che ora rivolgo ai miei studenti) soleva caratterizzare scherzosamente questo genere di ricerche col nome di *tic-tac-geometria*.

VIII.

Accanto all'estensione che alla Geometria moderna fu data dall'uso delle trasformazioni abbiamo già collocata quella che derivò dall'allargarsi del suo campo col considerare classi sempre più vaste di enti. A ciò si può connettere la comparsa della geometria degl'iperspazi, grazie a cui si sono allontanati indefinitamente i confini della scienza geometrica. Di questo campo è opportuno dire quì qualche cosa, sia perchè nell'ultimo decennio, specialmente dopo la Memoria, ormai celebre, del Veronese (1), si son rivolti ad esso con molti lavori parecchi geometri italiani (2) e con preferenza i più giovani, sia perchè, malgrado ciò, accade tuttora, anche in Italia, che non si sappia collocare la geometria ad n dimensioni al suo giusto posto (3).

---

(1) *Behandlung der proj. Verhältnisse* u. s. w. (Math. Ann. XIX).

(2) Se ne può contare almeno una ventina!

(3) Per completare quanto dirò in proposito ed appoggiarlo con una voce autorevole, riporto qui testualmente la 4ª Nota (*Ueber Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen*) del citato Programma di Klein.

« Dass der Raum, als Ort für Puncte aufgefasst, nur drei Dimensionen hat, braucht vom mathematischen Standpuncte aus nicht discutirt zu werden; ebenso wenig kann man aber vom mathematischen Standpuncte aus Jemanden hindern, zu behaupten, der Raum habe eigentlich vier, oder unbegränzt viele Dimensionen, wir seien aber nur im Stande, drei wahrzunehmen. Die Theorie der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, wie sie je länger je mehr in den Vordergrund neuerer mathematischer Forschung tritt, ist, ihrem Wesen nach, von einer solchen Behauptung vollkommen unabhängig. Es hat sich in ihr aber eine Redeweise eingebürgert, die allerdings dieser Vorstellung entflossen ist. Man spricht, statt von den Individuen einer Mannigfaltigkeit, von den Puncten eines höheren Raumes etc. An und für sich hat diese Redeweise manches Gute, insofern sie durch Erinnern an die geometrischen Anschauungen das Verständniss erleichtert. Sie hat aber die nachtheilige Folge gehabt, dass in ausgedehnten Kreisen die Untersuchungen über Mannigfaltigkeiten mit beliebig vielen Dimensionen als solidarisch erachtet werden mit der erwähnten Vorstellung von der Beschaffenheit des Raumes. Nichts ist grundloser als diese Auffassung. Die betr. mathematischen Untersuchungen würden allerdings sofort geometrische Verwendung finden, wenn die Vorstellung richtig wäre, — aber ihr Werth und ihre Absicht ruht, gänzlich unabhängig von dieser Vorstellung, in ihrem eigenen mathematischen Inhalte.

« Etwas ganz anders ist es, wenn Plücker gelehrt hat, den wirklichen Raum als eine Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen aufzufassen, indem man als Element des Raumes ein von beliebig vielen Parametern abhängendes Gebilde (Curve, Fläche etc.) einführt.

Si posson distinguere tre modi sotto cui si son presentati gl'iperspazi ai geometri; e ad essi corrispondono altrettante maniere di definire i punti di uno spazio lineare ad n dimensioni. Anzitutto, se, in base al metodo delle coordinate, si considerano i punti della retta, del piano o dello spazio come rappresentanti delle varietà analitiche composte da tutti i valori possibili di un numero, o di due numeri, o di tre, sicchè i sistemi di equazioni ad una, due, o tre variabili vengono rappresentati da aggruppamenti di punti, ecc., ecc., si è condotti naturalmente ad estendere il linguaggio geometrico al caso di un numero qualunque n di variabili, chiamando ancora *punto* un gruppo qualunque di valori (*coordinate* del punto) di n variabili, *spazio* (ad n dimensioni) l'insieme di tutti questi punti o gruppi di valori, *curva* o *superficie* la varietà costituita dai punti le cui coordinate sono date funzioni (colle debite restrizioni) di uno o due parametri (*retta* o *piano* nel caso che siano funzioni lineari fratte collo stesso denominatore), ecc., ecc. Tale estensione si è presentata come una necessità in un gran numero di ricerche (1), sia per dar loro la massima generalità, sia per conservare in esse il carattere intuitivo proprio della geometria. Ma è stato osservato che con ciò non si viene più a fare della vera geometria, poichè gli enti considerati sono essenzialmente analitici; e che ad esempio la geometria projettiva generale che così si viene a costruire non è altro in sostanza che l'algebra delle trasformazioni lineari (2).

« Die Vorstellungsweise, welche das Element der beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit als ein Analogon zum Puncte des Raumes betrachtet, ist wohl zuerst von GRASSMANN in seiner Ausdehnungslehre (1844) entwickelt worden. Bei ihm ist der Gedanke völlig frei von der erwähnten Vorstellung von der Natur des Raumes; letztere geht auf gelegentliche Bemerkungen von GAUSS zurück und wurde durch RIEMANN' s Untersuchungen über mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, in welche sie mit eingeflochten ist, in weiteren Kreisen bekannt.

« Beide Auffassungsweisen — die GRASSMANN' sche wie die PLÜCKER' sche — haben ihre eigenthümlichen Vorzüge; man verwendet sie beide, zwischen ihnen abwechselnd, mit Vortheil. »

(1) Cito solo come esempi le ricerche sugli ordini di sistemi di equazioni algebriche (varietà algebriche di uno spazio qualunque) del SALMON (*Geometria a tre dimensioni* e *Algebra moderna*), il lavoro del NÖTHER, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen* (Math. Ann. II, 1869), e la Memoria di CLEBSCH, *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie* (Gött. Abhandlungen, Bd. 17, 1872), rimandando per altre citazioni alla Monografia storica di LORIA.

(2) Questa è una distinzione, non un appunto. Purchè si faccia della *matematica !*

Un modo geometrico di giungere agl'inperspazi si ha seguendo il concetto di Plücker di considerare quali elementi (*punti*) di una varietà (di uno *spazio*) enti geometrici dello spazio ordinario, come gruppi di punti, curve, superficie, ... i quali dipendano da un numero qualsiasi di parametri. È così che le rette dello spazio ordinario si posson considerare, seguendo Plücker, come i *punti* di uno spazio a 4 dimensioni. Però se si vogliono in questa rappresentazione evitare gli elementi eccezionali, se si vuol cioè rappresentare *linearmente* una varietà ∞^n di enti geometrici ordinari coi punti di un iperspazio (lineare), conviene che quella varietà sia lineare. Così un'involuzione di specie n e di qualunque ordine di punti di una retta (ad esempio quella composta di tutti i gruppi di n punti), un sistema lineare ∞^n di curve piane o di superficie, o di connessi, ecc., ecc., è da questo punto di vista uno spazio (lineare) ad n dimensioni, sicchè le varietà contenute in questo non sono che varietà parziali di quell'involuzione o di quel sistema lineare. Questo modo di rappresentazione si è offerto spontaneamente ai geometri che hanno voluto approfondire le questioni sui sistemi infiniti di curve piane (o di superficie) [1]. È chiaro che stando a questo modo di concepirla, la geometria degl'iperspazi non presenta più alcuna novità di concetto: essa rientra nella geometria ordinaria, occupandosi delle varietà di enti che in questa compaiono.

Infine si può riguardare lo spazio ad n dimensioni come definito al modo stesso di quello ordinario, solo che si tolga il postulato delle 3 dimensioni, e si modifichino in conseguenza alcuni di quelli relativi alla retta ed al piano [2]. Allora i *punti* dell'iperspazio sono i punti

---

(1) Così se ne valse il Cayley nel 1° paragrafo della Memoria *On the Curves wich satisfy given Conditions* (Phil. Transactions, t. 158. 1867); e su esso ritornò in *A Memoir on Abstract Geometry* (ibid., t. 160, 1869), nel quale, rilevando l'importanza che dovrebbe avere la *geometria astratta,* cioè ad n dimensioni, osserva: « The science presents itself in two ways, — as a legitimate extension of the ordinary two— and three—dimensional geometries; and as a need in these geometries and in analysis generally. » Lo stesso concetto di applicazione degl'iperspazi ai sistemi infiniti di curve piane (o di superficie) è esposto chiaramente con qualche esempio dallo Halphen alla fine delle *Recherches de géométrie à* n *dimensions* (Bulletin Soc. math. de France, t. II, 1873); si ritrova poi nella Memoria di Clifford, *On the Classification of Loci* (Phil. Trans. t. 169, 1878) (nella quale i *punti* degl'iperspazi son definiti ed interpretati nelle applicazioni, come elementi di qualsiasi natura, curve, superficie, complessi, ecc.) ed in parecchi altri lavori recenti, ad es. in quello di Study, *Ueber die Geometrie der Kegelschnitte, insbesondere deren Charakteristikenproblem* (Math. Ann. t. 27).

(2) Non è ancora stato assegnato e discusso (ch'io sappia) un sistema

tali quali ce li immaginiamo nello spazio ordinario, e non più enti puramente analitici, od enti geometrici di qualunque natura [1]. A questo concetto son giunti specialmente coloro che hanno discussi i fondamenti della geometria, cercando quali postulati della scienza ordinaria si posson togliere senza troppi inconvenienti. E fu esso appunto che venne spesso confuso colla questione (fisica o filosofica, ma non matematica) del numero delle dimensioni che lo spazio ordinario (fisico) ha *effettivamente* (v. le parole del KLEIN dianzi citate in nota).

In ognuno di questi modi di considerare gli spazi lineari in geometria vi è qualche vantaggio; e si può specialmente notare che il 1° è molto generale e molto semplice, ma analitico, mentre il 3° è geometrico e pienamente intuitivo, ed il 2° è quello che più immediatamente si presta alle più numerose applicazioni per lo spazio ordinario. Ma la distinzione di questi modi non corrisponde poi a trattazioni diverse della geometria (projettiva) a n dimensioni. Anzi pel matematico essa non ha una vera importanza. Egli può evitare di farla e lavorare negl'iperspazi senza fissare quale sia tra le varie definizioni quella che egli sceglie; e può a dirittura tenerle tutte, per avere maggior quantità di rappresentazioni e d'interpretazioni dei risultati.

IX.

Da ciò che s'è detto risulta evidente che la geometria ad n dimensioni non ha caratteri matematici essenzialmente diversi da quelli della geometria ordinaria. Gli spazi a 4, 5,... dimensioni, quali noi li abbiamo definiti, esistono pel matematico precisamente a quel modo che esiste lo spazio a 3 dimensioni; ed egli li può studiare con gli stessi procedimenti. Così una varietà algebrica M_k (d'ordine m) appartenente ad S_n è un ente, analitico o geometrico, esistente allo stesso modo che esistono le n funzioni algebriche di k parametri indipendenti da cui

---

di postulati *indipendenti* che serva a caratterizzare lo spazio lineare ad n dimensioni, sì che se ne possa dedurre la rappresentazione dei punti di questo con coordinate. Sarebbe conveniente che qualche giovane si occupasse di questa quistione (che non sembra difficile).

(1) V. VERONESE, Mem. citata, e *La superficie omaloide normale*, ecc. (Memorie Lincei, serie 3ª, vol. XIX), nota a pie' della 2ª e 3ª pagina. — L'ipotesi fondamentale (che ivi appunto è enunciata) per questo modo di procedere, cioè che fuori della retta, del piano, dello spazio ordinario,... ci sian sempre dei punti (che, congiunti a spazi non passanti per essi, dànno gli spazi superiori), è permessa al matematico, poichè essa non contraddice a postulati precedenti (ove nei postulati ordinari si sian fatte le modificazioni sopra accennate).

essa è definita, oppure un sistema algebrico ∞^k (d'indice m) di curve piane o superficie... entro un sistema lineare ∞^n, ecc., ecc. Sarebbe poi assurdo il dire che gli enti degl'iperspazi hanno minor importanza (matematica) che quelli dello spazio ordinario: si può egli affermare che sia più importante la geometria piana che la solida? o che la teoria delle funzioni di una o di due variabili sia più importante che quella delle funzioni di un numero qualunque n di variabili? o che lo studio di una ∞^3 di enti sia di maggior momento che quello di una varietà comunque infinita, ∞^n?

Naturalmente non diremo neppure che una ricerca *pel solo fatto che si riferisce agl'iperspazi* sia più importante (¹) che una ricerca relativa allo spazio ordinario! Il paragone è solo possibile quando la prima ricerca si riduce alla seconda, per $n = 3$; ed allora non v'è dubbio che alla maggior generalità corrisponderà la maggior importanza. Ma se si paragona invece il complesso di *tutta* la geometria ad n dimensioni a *tutta* la geometria ordinaria, si può dire, sì, che questa è compresa come caso particolare in quella; ma conviene aggiungere che tutte le proposizioni di quella devon pure trovarsi in sostanza nella geometria ordinaria, come proprietà relative ai sistemi ∞^n di enti geometrici ordinari.

Quì, alle osservazioni su vari indirizzi di ricerche che dapprima abbiam riferito solo alla geometria ordinaria, ma che vanno estese senza altro a quella ad n dimensioni, è opportuno aggiungere una distinzione che naturalmente si presenta fra le ricerche a cui ha condotto l'introduzione degl'iperspazi. Nella serie infinita di nuovi enti e di nuovi problemi da studiare che da tale introduzione fu messa in evidenza, se ne trovano parecchi derivati per analogìa e generalizzazione da quelli relativi allo spazio ordinario, altri invece provenienti da concetti che in questo non si potevano avere. E così s'incontrano delle ricerche relativamente facili da fare perchè in esse la detta analogìa collo spazio ordinario guida subito alla generalizzazione dei metodi usati in questo e dei risultati ivi ottenuti; ma anche delle ricerche in cui si hanno difficoltà veramente nuove. Perchè l'edifizio (che appena s'è cominciato a costruire) venga ad essere completo occorrono e le une e le altre ricerche. In conseguenza errano coloro che ritengono la geometria degli iperspazi consistere tutta in una pura estensione, facile a farsi, della geometria ordinaria: come se similmente tutta la geometria dello spazio ordinario non fosse a sua volta che una semplice e facile generalizza-

(¹) Nè più difficile. L'esperienza prova che, specialmente pei giovani, è assai facile abituarsi alle costruzioni ed ai ragionamenti della geometria ad n dimensioni.

zione di quella piana! Ed hanno torto quei giovani che si limitano espressamente (per evitare difficoltà!) al primo genere di ricerche: ed è così facendo che essi inducono quell'opinione errata nei loro lettori! Certo che grazie agl'iperspazi coloro che amano gli argomenti facili li hanno visti aumentar di numero in modo straordinario! quante nuove generalizzazioni non si son così avute da fare, così facili che si possono enunciare senz'altro! quanti nuovi enti particolari non si sono avuti da costruire! quante trasformazioni particolari, quante projezioni in spazi inferiori [1] da far subire ad essi! Ma anche quì debbo ripetere che, se non si può rigettare senz'altro un argomento solo perchè è facile, non bisogna neppure lasciarsi sedurre unicamente dalla facilità, e si deve badare che ogni problema che si prende a trattare, facile o difficile ch'ei sia, abbia però sempre uno scopo utile, contribuisca in qualche modo ad elevare il grande edifizio, non sia uno di quei semplici esercizi, di quelle inutili generalizzazioni, che è tanto facile immaginare ed eseguire, e che, come non potranno mai entrare nella scienza, così non meriteranno mai lodi sincere!

X.

Lo spazio illimitato, senz'alcun vincolo al numero di dimensioni, è l'ambiente in cui oramai si debbono considerare le forme geometriche. Così facendo, oltre ad ottenere il grande vantaggio della massima generalità, si ha quello di togliere gli ostacoli che fino a poco tempo fa vietavano al geometra che conosceva l'utilità di certe considerazioni stereometriche per la geometria piana, di cercare in uno spazio superiore analoghe applicazioni allo spazio ordinario [2]. Negl'iperspazi non si hanno limiti; ogni spazio è contenuto in uno superiore: ed in questo si posson cercare degli enti che semplifichino lo studio di enti dati in quello, producendoli come proiezioni, o come sezioni, o come contorni apparenti, ecc. In ciò si ha una delle principali applicazioni della geometria degl'iperspazi a quella dello spazio ordinario [3]: ma non la sola.

---

(1) E spesso evitando anche qui il *problema inverso*, di vedere cioè quando l'ente dello spazio inferiore si può veramente riguardare come proiezione di quello dello spazio superiore!

(2) Del resto (è bene ripeterlo) l'importanza scientifica della geometria degl'iperspazi sussisterebbe perfettamente anche senza queste applicazioni.

(3) Pare che il primo esempio di siffatte applicazioni sia dovuto al CAYLEY, il quale nella Nota *Sur quelques théorèmes de la géométrie de position* (Crelle's Journal, t. 31, 1845, v. p. 218) osserva come certe configurazioni dello spazio ordinario o del piano si ottengano quali sezioni della configu-

Già si vede dalla seconda definizione data degli spazi superiori che tutti i risultati relativi a questi si possono tradurre in mille guise in proposizioni geometriche ordinarie, fissando quali enti geometrici dello spazio ordinario si debbon porre in luogo dei punti dell'iperspazio (1). Inoltre bisogna spesso rivolgersi a spazi superiori per avere le più adatte rappresentazioni di certe specie di varietà. Così lo studio di un

---

razione determinata da un numero qualsiasi di punti di un iperspazio qualunque. Dopo, altre ne furon notate da altri; ma il lavoro che per l'uso della proiezione dagli spazi superiori su quello ordinario ha veramente fatto epoca è stato quello del VERONESE.

A questo metodo è stata mossa la seguente obbiezione. Se un ente dello spazio ordinario si studia considerandolo come proiezione di uno appartenente ad uno spazio superiore, s'introduce così nei ragionamenti un nuovo postulato — l'esistenza di punti fuori dello spazio ordinario, — e quindi i risultati che si otterranno non avranno esattamente quel valore che avrebbero se provenissero da ragionamenti fatti senza uscire dallo spazio ordinario e dai relativi postulati. Quest'obbiezione, che appare legittima se degl'iperspazi si dà quella definizione che qui fu accennata come 3ª, si toglie invece se si ricorre alle altre due. Si consideri una rappresentazione dei punti ordinari sopra una varietà ∞^3 costituita o dai gruppi di valori di 3 numeri, o da opportuni enti geometrici ordinari (ad es. una rappresentazione sui gruppi di un'involuzione di grado n e di 3ª specie di punti di una retta). Questa varietà ∞^3 si può, *senza nuovi postulati*, introdurre e riguardare come contenuta in una (analitica o geometrica) ∞^n, alla quale si potranno riferire i ragionamenti iperspaziali: dopo di che si ritornerà allo spazio ordinario mediante la rappresentazione della ∞^3 su questo. In particolare si può ad esempio, aggiungendo a tutti i punti dello spazio, considerati come inviluppi di piani, un inviluppo fisso di classe $m-1$, mutarli in inviluppi di classe m; e così si ha un sistema lineare ∞^3 d'inviluppi, che, prendendo m opportunamente, si può sempre considerare come contenuto in un sistema lineare ∞^n: ed allora si può prender questo come rappresentante dell'iperspazio S_n adoperato nei ragionamenti. Le proiezioni e sezioni che per semplicità e brevità di discorso si riferiscono ai punti di un S_n, si potrebbero invece tradurre immediatamente come costruzioni relative agl'inviluppi di quel sistema lineare, e si giungerebbe così agli stessi risultati per lo spazio ordinario.

(1) Solo a chi non conosce questa multiplicità d'interpretazioni di cui è suscettibile la geometria degl'iperspazi, può accadere di sbagliare in certe questioni semplicissime sui sistemi ∞^1 di curve piane o di superficie, d'indice m, le quali son risolte implicitamente da teoremi notissimi sulle curve d'ordine m degl'iperspazi; o di riguardare come nuova la determinazione delle rigate di dato grado e del massimo genere, quando invece essa si può considerare come contenuta nella determinazione delle curve (della M_4^2 di rette) di dato ordine e di genere massimo!

sistema lineare di curve di un piano o di superficie dello spazio ordinario (dal punto di vista delle trasformazioni birazionali) trova una comoda imagine in quello (proiettivo) della superficie o varietà che ne è rappresentata. Per la geometria sull'ente algebrico semplice di genere p, e in particolare per lo studio delle serie lineari di gruppi sull'ente stesso si ricorre con vantaggio a certe curve dei vari spazi le quali rappresentano quelle serie lineari, e particolarmente alla curva normale d'ordine $2p-2$ appartenente allo spazio S_{p-1} (1). Una cosa analoga si potrà dire per la geometria su una superficie, e più in generale per la geometria su una varietà algebrica qualunque (2). Qui poi l'uso degl'iperspazi sarà necessario anche per rappresentare con un campo reale la distribuzione dei punti, reali e imaginari, della superficie (o varietà), cioè dei valori di una funzione algebrica di *due* (o più) variabili: a quel modo che per la geometria sulla curva, ossia per le funzioni algebriche di *una* variabile, si è avuto ricorso alle superficie di Riemann. Le ricerche sulla *Analysis situs* negl'iperspazi troveranno così applicazioni della massima importanza nella geometria sugli enti algebrici, cioè nella teoria delle funzioni algebriche di due o più variabili.

A questo modo, valendosi dall'un lato dei metodi di trasformazione della geometria moderna, delle considerazioni più generali sugl'iperspazi, ecc., e dall'altro dei concetti dovuti all'Analisi, gli enti che si considerano vengono a presentarsi sotto una varietà siffatta di aspetti e di punti di vista, ed a potersi trasformare in mille maniere, sì che, mentre si accrescono grandemente i mezzi di studiarli, diventano in pari tempo molto superiori l'interesse e l'importanza delle ricerche e vengono a congiungersi con un'eleganza ed una leggiadrìa singolari. Così l'ente algebrico ∞^1 (*algebraische Gebilde*) di genere p viene a rappresentarsi con una curva algebrica di qualunque spazio, o con una

---

(1) A questo proposito mi piace rilevare che nelle recenti *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen* del Klein (e Fricke) (I. Band, Leipzig, 1890; v. il III. Abschnitt) la rappresentazione geometrica dell'ente algebrico semplice e della teoria delle funzioni algebriche e dei loro integrali, e quindi delle serie lineari di gruppi, ecc., ecc., è data appunto mediante curve di tutti gli spazi (anzi che colla sola curva piana, come dai più si usa di fare).

(2) Della geometria sopra una varietà algebrica, curva, superficie, ecc., ho fatto cenno ripetutamente, perchè su essa mi piace richiamare l'attenzione dei giovani: si tratta in fatti di un argomento d'importanza capitale per tutta la matematica — l'analisi come la geometria, — e sarebbe bene che molti vi rivolgessero le loro forze!

rigata, o con un sistema ∞^1 di curve o superficie, ecc.; o con una classe di funzioni algebriche o di funzioni abeliane, o con un sistema di funzioni fuchsiane; o con una superficie di RIEMANN, con una sfera dotata di p manichi o di p buchi, con un poligono piano curvilineo generatore di un gruppo fuchsiano [1], ecc. ecc.: e tutti questi enti si equivalgono; per trasformazioni geometriche od analitiche, per deformazioni continue, per rappresentazioni conformi, si mutano gli uni negli altri; e da tutti lo studio dell'ente algebrico può trarre aiuti!

I giovani che, seguendo questi indirizzi, riusciranno nel miglior modo a possedere i diversi strumenti di ricerca e ad abbracciare da tutti i possibili punti di vista la scienza, avranno da questa i più splendidi trionfi!

Torino, febbraio 1891.

Osservazioni del Direttore

SULL'ARTICOLO PRECEDENTE.

Per principio, la *Rivista di Matematica* deve essere una palestra libera, ove si possano scientificamente discutere tutte le opinioni. Così nell'articolo precedente, ove si tratta di *indirizzi nelle investigazioni geometriche*, è possibile in alcuni punti una diversità di opinioni. Per nostro conto noi non possiamo che approvare pienamente la maggior parte delle opinioni manifestate nell'importante lavoro del prof. Segre. In pochi punti il nostro modo di vedere differisce da quello dell'A.

Così (n. VI) il difetto di rigore in lavori di matematica, non si può, a nostro modo di vedere, in alcun modo, difendere o scusare. Noi riteniamo *falsa* una proposizione, se vi si può trovare un caso d'eccezione; e che non si possa considerare come *ottenuto* un risultato, finchè esso non è rigorosamente provato, ancorchè non si conoscano casi di eccezione. Così la proposizione conosciuta col nome di ultimo teorema di Fermat, della quale non si conoscono eccezioni, ma nemmeno una dimostrazione rigorosa (le dimostrazioni non rigorose sono numerosissime), non è al giorno d'oggi per i matematici un risultato, ma l'enunciato di un problema di cui si attende la soluzione.

Il rigore assoluto che si esige in matematica non significa punto che non si possa studiare una scienza finchè non siano analizzati tutti

---

[1] In particolare per l'ente ellittico ($p = 1$): l'anello, il parallelogrammo, la corrispondenza (2, 2) fra due variabili, ecc.

i suoi principii. Ogni autore può assumere quelle leggi sperimentali che gli talentano, e può fare quelle ipotesi che più gli piacciono. La buona scelta di queste ipotesi ha importanza grandissima nella teoria che si vuol sviluppare; ma questa scelta si fa per via d'induzione, e non appartiene alla matematica. Fatta la scelta dei punti di partenza, spetta alla matematica (che, secondo noi, è una logica perfezionata) a dedurne le conseguenze; e queste debbono essere assolutamente rigorose. Chi enuncia delle conseguenze che non sono contenute nelle premesse, potrà fare della poesia, ma non della matematica. Quindi troviamo strano che in giornali autorevoli, e trattandosi di matematica purissima, sia scritto: « La démonstration ingénieuse, que ce géomètre y donne de cette importante formule, pourrait laisser sur sa validité absolue des doutes, qui se réfléchiraient sur le n° présent et plus loin...: cependant les confirmations qu'on trouve de ces résultats me portent à penser qu'ils sont absolument vrais ». E noi vorremmo avere per un istante voce autorevole fra i giovani nostri colleghi, per ben convincerli di questa verità, che i lavori in cui fa difetto il rigore non possono far avanzare d'un passo la matematica.

Il rigore assoluto, se è condizione necessaria affinchè un lavoro sia scientifico, non è ancora condizione sufficiente. Un'altra condizione sta nelle ipotesi da cui si parte. Se un autore parte da ipotesi contrarie all'esperienza, o da ipotesi non verificabili coll'esperienza, nè esse, nè le loro conseguenze, potrà, è vero, dedurre una qualche teoria meravigliosa, da far esclamare: quale vantaggio, se l'autore avesse applicato il suo ragionamento ad ipotesi pratiche!

Strettamente collegato con quanto precede è la teoria degli spazi a quattro e più dimensìoni, ove si supponga che i punti dell'iperspazio siano tali e quali ce li immaginiamo nello spazio ordinario (n. VIII). La Geometria comune basa sopra un certo numero di postulati, la cui analisi completa è difficile e non fu ancor fatta. Euclide, ad es., usa dei postulati non esplicitamente enunciati; e nei trattati moderni di Geometria trovansi spesso enunciati dei postulati inutili, senza che siano enunciati tutti i necessarii. Fra gli autori che hanno discussi i fondamenti della geometria eccelle, a nostro avviso, il Pasch (*Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig 1882). Limitandoci ai principii su cui basa la Geometria di posizione (cioè fatta astrazione dall'idea di moto), questi postulati furono da noi trasformati in simboli di logica nei « Principii di Geometria », e si devono, fino a prova contraria, ritenere *indipendenti*. In questo opuscolo, partendo dalle idee intuitive, e non definite, di punto e di segmento rettilineo, si definiscono successivamente la retta illimitata, il triangolo, l'angolo, il piano, il diedro, ecc. I postulati che enunciano le proprietà fondamentali di questi enti sono in numero di 16;

l'ultimo dice in sostanza che lo spazio ordinario è a tre dimensioni, e permette di dedurne il teorema (4 del § 12): « Due piani aventi di comune un punto, hanno di comune una retta. » Dalle proposizioni precedenti si deducono i teoremi di Geometria projettiva, e si badi che il teorema fondamentale sui triangoli omologici si può ottenere come conseguenza degli assiomi 1-15, senza servirci del 16. Ne deriva la rappresentazione dei punti mediante le coordinate (razionali senz'altro, irrazionali se si fanno sui punti convenzioni analoghe a quelle dell'algebra per introdurre i numeri irrazionali, ovvero si introduce l'assioma 17° (pag. 39 dei Princ. di Geom.)).

Per passare dallo spazio a 3 dimensioni a quello a 4, occorre sopprimere il postulato 16°, e poi, senza modificare quelli riferentisi alla retta e al piano, ammettere il postulato, analogo ai 2, 7, 12, 15:

A] *Esistono dei punti fuori dello spazio ordinario.*

Ne risulta come conseguenza (accennata dall'A. nella nota 3 della pag. 63) che, per questa via, *ogni proposizione dimostrata vera servendoci dello spazio a quattro dimensioni, cessa di valere nello spazio a tre,* poichè si è dimostrata conseguenza dei postulati 1-15 e del postulato A, e non si è dimostrata conseguenza dei soli postulati della geometria elementare.

E a questo proposito, ci sia permessa una digressione. Alcuni scrittori, dal fatto che molte proprietà di figure piane derivano da proprietà di figure solide, deducono per analogia che proprietà di figure dello spazio ordinario possano derivare da considerazioni nello spazio a quattro dimensioni. Ma l'analogia è solo apparente. Se si distingue la geometria in piana e solida, secondochè si occupa a preferenza di figure nel piano o nello spazio, avremo fatto una semplice distinzione didattica; e può tornare utile di enunciare subito in principio tutti i postulati di cui si deve far uso, onde trarne il miglior partito possibile. Ma se per geometria della retta (ad una dimensione) intendiamo quella che sviluppa le conseguenze degli assiomi 1-11; per geometria piana (a 2 dimensioni) quella che sviluppa le conseguenze degli 1-14, e per geometria solida quella che si serve anche dell'assioma 15°, allora avremo fatto una distinzione scientifica (e distinzioni di questa fatta sono tante quante le scelte di alcuni fra i postulati). Allora ne avverrà che la geometria della retta si riduce a ben poca cosa; su essa non si possono stabilire le coordinate. La geometria del piano è già più ampia; già vi si possono stabilire le coordinate, ma non si può ancora trovare l'equazione della linea retta (sempre, si intende, senza ricorrere ad altri postulati, come quello delle parallele), nè dimostrare il teorema dei triangoli omologici. Invece colla geometria solida possiamo arrivare alle formole ordinarie, e quindi dedurre tutte le proprietà proiettive delle figure

nello spazio. In conseguenza, nel senso spiegato, una proposizione vera in geometria piana, cessa di sussistere nella geometria della retta, ed una proposizione di geometria solida non sussiste più in geometria piana. Il teorema dei triangoli omologici è allora una proposizione di geometria solida e non di geometria piana. Quindi la geometria a tre dimensioni non può aiutare quella a due; d'altra parte la geometria a tre dimensioni è in sè completa e chiusa.

G. Peano.

Sulla teoria delle probabilità.

Lettera aperta al Professore ERNESTO CESÀRO

Mantova, 4 marzo 1891.

Ch.mo Sig. Professore,

Devo alla di Lei cortesia di aver potuto sin d'ora leggere per intero il suo interessante articolo: *Considerazioni sul concetto di probabilità*, pubblicato solo in parte nel fascicolo di gennaio-febbraio 1891 del *Periodico di Matematica.* E poichè Ella riferisce e combatte ivi alcune osservazioni sulla teoria delle probabilità geometriche che Le esposi per lettera qualche tempo fa, mi sia permesso ora di riprendere la parola in argomento. Non intendo certo di esaminare il suo lavoro punto per punto; mi limito soltanto a poche considerazioni, che stimo essenziali. Per maggior chiarezza mi riferirò spesso ad un problema particolare.

Sieno proposte le due seguenti questioni:

A) Trovare la probabilità che una corda tirata arbitrariamente in un cerchio non sia maggiore del lato del triangolo equilatero inscritto.

B) Trovare la probabilità che due punti presi arbitrariamente sopra una circonferenza comprendano un arco non maggiore di 120°.

Applicando la teoria delle probabilità geometriche si giunge rispettivamente ai risultati $^1/_2$, $^2/_3$. Perchè questa diversità di risultati per due problemi che ogni persona non prevenuta giudicherebbe identici? Il Czuber dice espressamente, che altro è tirare ad arbitrio una corda, ed altro prendere ad arbitrio due punti sulla circonferenza; ed Ella trova il fondamento di questa e delle analoghe distinzioni nel concetto della *densità*. Nessuno può negare che, stabilita la legge delle densità, ogni problema di probabilità geometriche dia luogo ad una soluzione unica e determinata; ed io Le concedo pure che, quando l'enunciato

del problema sia formulato accuratamente, esso lascia vedere, nella maggior parte dei casi, la legge delle densità che deve presumersi come vigente, la quale non ha quindi d'uopo di figurare esplicitamente nell'enunciato stesso. Così ciascuno dei due enunciati A, B implica una legge di densità ben determinata e conduce senza alcun equivoco ad una soluzione unica. Ma questi due enunciati, che sono tra loro differenti, non costituiscono se non due espressioni diverse d'un problema unico. Ed invero qual differenza passa *nel fatto* fra il tirare ad arbitrio una corda e il segnare ad arbitrio due punti della circonferenza? Nessuna di certo. Questi due atti si equivalgono perfettamente l'un l'altro; e alla proposta di tirare una corda a capriccio, come a quella di prendere due punti qualsiasi sulla circonferenza, io potrei rispondere indifferentemente eseguendo l'uno o l'altra delle due cose.

Ora, domando io, se si tirasse a capriccio un milione di corde, oppure, ciò che è lo stesso, se si segnasse ad arbitrio un milione di coppie di punti sulla circonferenza e si congiungessero tra loro i punti di ciascuna coppia, il numero delle corde non maggiori del lato del triangolo equilatero inscritto risulterebbe vicino a 500000 od a 666666? In altre parole, degli enunciati A e B (e di tutti gli altri infiniti che possono concepirsi) quale corrisponde *veramente* al problema reale? Non lo sappiamo, e non possiamo saperlo, perchè, come avrò a ripetere più avanti, la mia domanda non ammette alcuna risposta determinata. Il problema che io mi sono proposto può considerarsi in infiniti modi diversi come il limite d'una serie di problemi in cui il numero dei casi possibili, pur essendo finito, cresce indefinitamente. La teoria delle probabilità geometriche sceglie una (a) di queste serie e cerca il limite p_a delle probabilità corrispondenti ai vari problemi che la costituiscono; se ne scegliesse un'altra (b), otterrebbe un risultato differente p_b. I risultati p_a e p_b corrispondono a due enunciati diversi d'uno stesso problema primitivo; essi sono due delle infinite soluzioni a cui questo può dar luogo, ma nè l'uno nè l'altro costituisce *la soluzione* di esso. Per scegliere un paragone nel campo dell'analisi, se una funzione ha un punto singolare essenziale, potrà andarsi ad esso lungo certe direzioni a cui corrisponderanno per la funzione limiti determinati (in generale tra loro diversi); ma non è men vero che il valore della funzione in quel punto è indeterminato. Io non disconosco l'eleganza della teoria delle probabilità geometriche e l'attrazione che essa può esercitare sugli studiosi delle matematiche, ma tanto più mi pare necessario d'insistere su questo punto, che non si deve mai dimenticare quale valore vero abbiano i suoi risultati e in base a quali ipotesi essi sieno ottenuti; e sono ben lieto d'aver dato occasione a Lei di mettere in chiaro, come forse non era ancora stato fatto, i principî di quella teoria. Aggiungerò

poi, che non ho inteso di fare, propriamente parlando, una obiezione alla teoria di cui parliamo, osservando che la legge di Poisson non è applicabile alle questioni in cui il numero delle possibilità è infinito. Ho voluto dire con ciò, che per tali questioni, come ho già accennato, non può in generale attendersi dall'esperienza alcun risultato costante.

Riassumendo adunque, non solo la teoria delle probabilità geometriche non risolve la questione che mi sono proposta, ma la questione stessa non ammette una soluzione determinata ed unica.

A queste conclusioni potrebbe obiettarsi, che in qualche caso i risultati della teoria delle probabilità geometriche si trovano d'accordo coll'esperienza. Così è per esempio del notissimo problema dell'ago. Ma, se esaminiamo meglio le cose, vediamo che ciò non infirma punto quanto io ho asserito. Consideriamo, per maggior semplicità, il problema della moneta. Sia tracciato sopra una tavola orizzontale un sistema di rette parallele a distanza a l'una dall'altra, e si getti sulla tavola una moneta di diametro d; la probabilità che essa cada sopra una delle parallele è, secondo la teoria, $\frac{d}{a}$, e un risultato sensibilmente concorde viene dato dall'esperienza. Ora, se supponiamo le nostre misure esatte sino al millimetro, la nostra tavola, di cui indicheremo in millimetri la lunghezza con l e la larghezza con na, ci apparirà come un reticolo a maglie quadrate di 1 mm. di lato, e le posizioni possibili (e che dobbiamo ritenere ragionevolmente come egualmente possibili) del centro della moneta saranno nal, mentre quelle favorevoli alla nostra ipotesi saranno ndl. Siamo dunque nel caso d'un problema in cui il numero delle possibilità è finito, e la probabilità ci è data immediatamente da $\frac{ndl}{nal}$, cioè da $\frac{d}{a}$. Non solo; ma, poichè qui la legge di Poisson è applicabile, abbiamo diritto di pensare che il risultato di un numero abbastanza grande di prove sarà vicino a $\frac{d}{a}$. Adunque nel caso che consideriamo la teoria e l'esperienza ci danno sensibilmente uno stesso risultato. È facile persuadersi che la ragione di tale coincidenza sta nel fatto che la legge di densità adottata nella soluzione teorica è, se così posso esprimermi, il limite di quella che ci si presenta come la più naturale nel caso pratico. Ne segue che quei problemi, e sono i più, nei quali nessuna legge ci si impone come la più naturale (p. es. il problema delle corde del cerchio), sono effettivamente indeterminati, sicchè è vano sperare per essi dai risultati della teoria un aiuto per la previsione dell'esito delle esperienze.

Concludiamo ormai, e poniamo in luce il punto su cui ci troviamo in disaccordo. Ella dice (p. 3), che onde una questione cada sotto il

dominio del calcolo delle probabilità « occorre che l'enunciato di essa lasci scorgere il modo più naturale ecc. », ma poi, presentandosi un problema qualsiasi, Ella ha sempre cura di formularlo in guisa che questo *modo più naturale* appaia in ogni caso senza equivoco; s'intende però, che questo in generale può farsi in infinite maniere diverse, sicchè un problema unico può avere un'infinità d'enunciati, e quindi altrettanti *modi più naturali* ecc. ed altrettante soluzioni. Io invece esigo che non solo l'enunciato della questione, cioè quel modo di formularla che io posso aver scelto a piacere fra gl'infiniti possibili, ma l'essenza stessa della questione lasci scorgere il *modo più naturale* ecc.; allora soltanto la soluzione è unica, e quindi risponde veramente al problema (come avviene pel giuoco della moneta). Tutto il resto può essere elegante analiticamente, può anche essere utile come metodo di ricerca, ma come calcolo di probabilità, cioè come applicazione delle matematiche allo studio dei fenomeni naturali, non so attribuirgli alcun valore.

Mi creda colla massima stima

Suo devotissimo

GIULIO VIVANTI.

Sopra la parte fatta alla storia in un disegno di Bibliografia delle Matematiche.

Nota di A. FAVARO.

L'indirizzo che gli studi concernenti la Storia delle Matematiche hanno ricevuto negli ultimi dieci o dodici lustri doveva far maggiormente sentire la mancanza d'una bibliografia matematica, e chiunque ha atteso ad indagini concernenti la storia scientifica sa troppo bene quanta fatica, quanto tempo e quanti danari costi l'allestimento della cosiddetta *Literatur der Frage*, senza la quale non solo non può imprendersi alcuna ricerca storica, ma nemmeno alcun serio lavoro, qualunque ne sia l'argomento, eccettuato il caso in cui si aspiri a dar vita ad una *proles sine matre creata,* quantunque in questo, forse più che in altri casi, dovrebbe tornar utile l'accertarsi anzitutto della inesistenza di precedenti.

Non è per verità, ed a stretto rigore, che manchino affatto i repertorii nei quali lo studioso possa pescare le indicazioni delle quali abbisogna. I lavori dello Scheibel, del Beughem, del Murhard, del Reuss, del Müller, del Rogg, del Sohncke, dell'Erlecke, del Poggendorff, la *List of Scientific papers* edita dalla Società Reale di Londra, l'*Jahrbuch*

über die Fortschritte der Mathematik, i poderosi ed accuratissimi lavori del Riccardi, del Bierens de Haan e del Zembrawski, ed una quantità di lavori speciali concernenti un determinato ramo dello scibile matematico riescono senza alcun dubbio preziosissimi; ma, sia perchè alcuni sono limitati alla produzione d'un solo paese o di un'epoca limitata, o ad un argomento determinato, sia perchè in generale condotti seguendo criterii e formule diverse, sia perchè nel loro complesso non presentano caratteri di continuità, sia infine perchè non tutti elaborati col medesimo scrupolo, non offrono allo studioso quelle garanzie di quasi assoluta sicurezza, le quali lo rendano ben certo ch'egli non corre alcun pericolo di trascurare alcun contributo, e forse tra i principali, all'argomento del quale egli si propone di occuparsi.

Ora, quasi contemporaneamente, veniva portato a conoscenza degli studiosi che il Riccardi, il cui solo nome è garanzia di successo in lavori di simil genere, stava per condurre a termine la *Biblioteca Matematica italiana del secolo XIX* in continuazione ed a complemento di quella pregevolissima già fatta di pubblica ragione e che si estende dalla origine della stampa ai primi anni del corrente secolo, che il Valentin si era sobbarcato alla immane fatica di raccogliere tutte le indicazioni relative ai lavori matematici pubblicati dalla invenzione della tipografia fino ai giorni nostri, eccettuatine i trattati puramente elementari; e finalmente la Società Matematica di Francia annunziava la intenzione di compilare un repertorio bibliografico per il quale venivano diramate alcune circolari, seguìte poco appresso da un disegno di classificazione particolareggiata, modificato di poi in conseguenza delle osservazioni che vi avevano fatte gli studiosi ai quali era stato indirizzato.

La esposizione universale di Parigi del 1889 parve occasione opportuna per riunire un congresso internazionale di bibliografia delle matematiche « dans le but d'établir un répertoire detaillé de toutes les questions du domaine de ces sciences, répertoire qui servira ensuite de base à la classification des travaux des géomètres. » A questo congresso, che fu tenuto in Parigi dal 16 al 19 luglio 1889, erano stati invitati numerosi matematici d'ogni parte d'Europa ed anche alcuni americani, dei quali fu stampato l'elenco: e dei lavori di esso venne pur pubblicato un processo verbale sommario. Il Congresso prese per fondamento dei suoi lavori gli studi già fatti, secondo l'accennato indirizzo, dalla Società Matematica di Francia: nei giorni 16, 17, e 18 luglio si discusse il disegno di classificazione proposto dal Comitato a ciò designato, e nel successivo 19 venne fra le altre cose determinato:

1° Di pubblicare un repertorio bibliografico delle matematiche, col fine di risparmiare lunghe e faticose ricerche agli studiosi, e di

comprendervi i titoli delle memorie concernenti le matematiche pure ed applicate date alla luce dal 1800 fino al 1889 inclusivamente, ed i lavori relativi alla storia delle matematiche a partire dal 1600, prendendo per fondamento l'ordine logico delle materie;

2° Di pubblicare successivamente dei supplementi per periodi decennali, nei quali sia fatto posto alle eventuali omissioni del repertorio principale e dei precedenti supplementi;

3° Di escludere dal repertorio le opere destinate a fini didattici non contenenti la esposizione di risultati originali, e così pure i lavori concernenti le matematiche applicate, i quali non interessino il progresso delle matematiche pure, e nominatamente quelli astronomici e già registrati nella Bibliografia di Houzeau e Lancaster.

E venendo ora a dire in particolare della classificazione per ciò che concerne in particolare la storia, non ci è noto a quali criterii si sia informato il Valentin; ma il Riccardi è entrato in qualche dichiarazione a questo proposito nel Saggio da lui edito, e la Commissione permanente, costituita nella occasione dell'anzidetto Congresso, ha pubblicato il suo disegno con ogni particolare.

Il Riccardi, con quella incontestabile competenza che gli deriva dall'aver già condotto a termine quel colossale lavoro al quale abbiamo già accennato, avverte giudiziosamente che una delle maggiori difficoltà consiste nel determinare precisamente quali siano le opere da comprendersi, cioè quali in tutto o in parte si possano classificare fra le matematiche, imperocchè apparisca assai chiaro come un ben sottile, e talvolta quasi impercettibile, anello di congiunzione riunisca questa ad altre scienze affini. Nell'incertezza però, che sempre lascia la pratica applicazione dei principii astrattamente i più fermi, è sempre preferibile largheggiare, non escludendo quegli scritti i quali, sebbene a tutto rigore non si possano classificare fra i matematici, meritano tuttavia di essere conosciuti per l'attinenza immediata storica o scientifica che hanno con questa scienza.

Se pertanto in quel suo antecedente lavoro ebbe il Riccardi per intendimento precipuo di far opera profittevole alla storia ed alla bibliografia delle scienze esatte ed alla biografia degli uomini che nel passato contribuirono al loro avanzamento, nella continuazione di esso egli si propone d'intendere ad uno scopo principalmente scientifico. E se nella *Biblioteca Matematica* diede la precedenza al catalogo alfabetico per nomi di autori, pare invero che in una bibliografia matematica dei nostri tempi debba tenere il primo posto il prospetto delle opere per ordine di materie. Il quale però, allo scopo di agevolare le ricerche degli studiosi, e ad evitare la superflua ripetizione della indicazione della stessa opera tante volte quanti sono i soggetti in essa trattati,

dovrebbe essere accompagnato e seguìto da un indice per argomenti, i cui titoli con soli numeri di richiamo avessero riferimento al prospetto. E valga il vero, che le semplici classificazioni per materie senza il sussidio degli indici per argomenti, non possono far buona prova, nemmeno come cataloghi di pubbliche biblioteche, imperocchè, oltre l'accennato inconveniente di dover più volte ripetere il titolo delle stesse opere, è da considerarsi che la formazione di una particolareggiata classificazione per materie, anche in uno stesso ramo dello scibile, dipende da criterii individuali e variabili, mentre l'indice per argomenti è determinato dai titoli stessi del soggetto dell'opera e delle varie sue parti; ed è sempre suscettibile di ulteriori perfezionamenti, mediante l'aggiunta di nuovi titoli, senza alterare l'ordine del prospetto generale o del catalogo. A soddisfare infine alle ricerche biografiche potrebbe, secondo il Riccardi, riuscire sufficiente un indice alfabetico dei nomi degli autori, con le sole indicazioni del luogo nativo, degli anni nei quali vissero od in cui nacquero, se tuttora viventi, delle memorie pubblicate intorno alla loro vita ed in generale sui loro studi, chè dei giudizi speciali e dei particolareggiati annunzi delle loro opere ravviserebbe preferibile il far menzione in calce alla indicazione che nel Prospetto generale viene delle opere stesse somministrata. Queste indicazioni biografiche di ciascun autore verrebbero completate dalla serie dei numeri coi quali le rispettive opere sono indicate nel Prospetto.

Il *Saggio* dato alla luce dal Riccardi ed al quale abbiamo già accennato, contiene tre elenchi di opere pubblicate da autori italiani rispettivamente intorno alla prospettiva, alla geometria descrittiva e ad alcune applicazioni di questa, inclusovi il disegno axonometrico, ed in ognuno di essi il « Catalogo cronologico » è preceduto dalle « Fonti storiche » relative. Di qui adunque apparisce la intenzione del Riccardi di premettere a ciascuna grande divisione della sua nuova *Biblioteca Matematica* la indicazione delle fonti alle quali si devono attingere le notizie storiche particolarmente ad essa relative.

Il disegno di repertorio bibliografico compilato in seguito all'iniziativa della Società Matematica di Francia parte invece da criterii affatto diversi. Esso divide anzitutto lo scibile matematico, o, per dir più esatto, il materiale bibliografico che si propone di classificare in tre grandi categorie, cioè: Analisi matematica, Geometria e Matematiche applicate, e colloca la storia delle scienze matematiche fra queste ultime, conglomerandola con la rispettiva filosofia.

Che la storia delle matematiche fosse da considerarsi come un ramo delle matematiche applicate, per verità non avevamo mai saputo: e tanto meno ci sembra giustificata tale classificazione, quando vediamo esclusa da queste l'applicazione del calcolo alle scienze morali ed economiche,

la quale è compresa, col calcolo delle probabilità, tra i lavori di analisi matematica.

Ma ancor meno ci soddisfa la relativa suddivisione che qui testualmente riproduciamo:

CLASSE V.

Philosophie et Histoire des Sciences Mathématiques.

1. Considérations diverses sur la philosophie des Mathématiques.
   a. *Méthodologie.*
2. Origine des Mathématiques: Egypte; Chaldée.
3. Grèce.
   a. *Période hellène jusqu'à Euclide.*
   b. *Période alexandrine, d'Euclide à Héron.*
   c. *Période gréco-romaine, jusqu'à Constantin.*
   d. *De Constantin à la chute de l'empire byzantin; mathématiques byzantines.*
4. Orient et Extrême-Orient.
   a. *Indous.* — b. *Chinois.* — c. *Arabes.* — d. *Juifs.*
5. Occident latin.
   a. *Romains.* — b. *Moyen-âge.*
6. Renaissance, XVI^e siècle. — 7. XVII^e siècle.
8. XVIII^e siècle. — 9. XIX^e siècle. — 10. XX^e siècle.

Ho già avvertito che le risoluzioni prese nell'ultima adunanza del Congresso portano che con i lavori d'indole storica non si debba nel repertorio risalire al di là del 1600: quali ragioni abbiano indotto a tale limitazione non sappiamo invero, ed anzi non comprendiamo come il numero, relativamente assai ristretto, di lavori storici antecedenti a tale epoca non abbia consigliato a non imporre limitazione di sorta alcuna, rendendo così, almeno sotto questo rispetto, nei riflessi del tempo, completo il repertorio.

La classificazione poi, quale ci viene offerta, apparisce esclusivamente informata a criterii di tempi e di luoghi, cosicchè, non essendo tenuto alcun conto dell'indole dei lavori, i compilatori saranno necessariamente obbligati a ripetere ed a richiamare in ogni singola suddivisione i titoli così dei lavori storici generali, come di tutte le monografie le quali, comprendendo lo svolgimento storico di un determinato argomento o di una determinata questione, si riferiscono necessariamente e a più tempi e a più luoghi.

Per fermo seduce la prospettiva di trovare insieme raccolta in una

classe a sè tutta la suppellettile storica, ma questa condensazione non può farsi, secondo il nostro avviso, senza nuocere grandemente allo scopo supremo del lavoro ed alla sua economia. Infatti, poichè il fine essenziale del repertorio è di risparmiare agli studiosi quelle faticose indagini che, in mancanza di esso, sono oggidì necessarie, perchè vorrà costringersi lo studioso, che vuol raccogliere i materiali concernenti la storia di un dato problema, ad andar percorrendo tutta intera la classe, senza aver dopo ciò la certezza di aver esaurite le sue ricerche, poichè con tutta probabilità, anzi diremmo con la quasi assoluta certezza, i titoli delle opere riferite non gli diranno se le varie fasi, che la soluzione di quel problema ha attraversate, vi si trovino tutte descritte?

Fra le varie risoluzioni adottate dal Congresso è pure quella di esprimere il voto che ogni autore ponga in seguito al titolo della sua memoria una notazione, la quale in modo abbreviato e secondo convenzioni stabilite si riferisca alla classificazione presa per fondamento. Or bene, quale notazione dovrebbe essere apposta a questa stessa bibliografia che si tratta di compilare, se alla bibliografia non è fatta parte alcuna nella classificazione? Secondo l'avviso nostro, del resto, non solo la bibliografia avrebbe dovuto esser tenuta distinta dalla storia e messa nella dovuta evidenza; ma altresì gioverebbe lo sceverare da questa la serie delle biografie, come già fece il Jackson in quel suo bellissimo lavoro per la botanica, che aggiunge intorno a seimila voci a quello, già esso stesso così ben fatto e così utile, compilato dal Pritzel.

Mossi, non già da un sentimento di sistematica opposizione, ma dal desiderio di far sì che un tanto immane lavoro, il quale non potrà certamente essere a breve scadenza rimaneggiato, riesca il migliore possibile, ci permettiamo di esprimere l'avviso che tutta la Classe V del disegno debba esser modificata, sia separando la parte delle considerazioni filosofiche da quella che più strettamente deve risguardare la parte didattica, sia rimaneggiando completamente la distribuzione della sezione storica, la quale, per i lavori generali, deve trovare il suo posto in capo al repertorio, e per quelli speciali venir distribuita convenientemente in capo alle singole sezioni, cosicchè la bibliografia di ciascuna di esse riesca veramente completa.

Da parte nostra vogliamo sperare che la Commissione modificherà il suo primitivo disegno: e se non lo farà fin da bel principio, vi sarà ineluttabilmente costretta all'atto pratico, se pur vorrà far opera che corrisponda pienamente al fine ch'essa si è proposto di conseguire, e nel raggiungimento del quale l'accompagnano i fervidi voti di tutti gli studiosi.

Sulla definizione di velocità di un punto.

Nota del Dott. G. M. Testi.

L'egregio Prof. Novarese pone in fine della sua Nota, pubblicata nel 1° numero della presente *Rivista*, e che porta il medesimo titolo di questa, le domande seguenti:

« La velocità di un punto mobile è un numero o un segmento? « O, a dir meglio, è preferibile in Cinematica definirla come un nu- « mero o come un segmento? E in Meccanica, è dessa da considerarsi « nè più nè meno che in Cinematica, ovvero come qualche cosa di « connesso colle proprietà che si attribuiscono al punto materiale? »

E ciò dopo aver passato in rassegna le definizioni che alcuni autori dànno della velocità di un punto.

Ho voluto rileggere nei pochi autori di meccanica della mia modesta libreria la definizione di velocità ed ho trovato la stessa incertezza. Il Prof. Roiti nei suoi *Elementi di fisica*, per cominciare con un'opera elementare, chiama velocità « l'attitudine che ha un corpo di « percorrere uno spazio maggiore o minore in un dato tempo » e dice che nel moto uniforme essa *è misurata* dallo spazio percorso nell'unità di tempo (v. I, n. 24) e nel moto vario definisce soltanto *la velocità media*. E così, o presso a poco, è detto in altri trattati di fisica, in alcuni dei quali, come per es. in quello del Cantoni, si parla di velocità di un moto vario senza darne la definizione.

Nelle *Leçons de Mécanique* del Briot si legge (pag. 5): « Dans un « pareil mouvement (il movimento uniforme) on appelle *vitesse* la lon- « gueur parcourue par le mobile dans l'unité de temps », e poi, dopo aver definito nel moto vario la velocità come il limite della velocità media, è aggiunto: « la vitesse au temps t est une grandeur géome- « trique portée sur la tangente à la trajectoire, dans un sens déter- « miné » (pag. 9); e questo concetto poi è ribadito nel caso del moto circolare uniforme colle parole: « la vitesse, quoique ayant une lon- « gueur constante, doit être regardée comme une grandeur géométrique « variable, à cause du changement de sa direction. »

Nel *Traité de Mécanique* del Laurent (v. I, pag. 5) è definita al solito la velocità nel moto uniforme come « l'espace parcouru par le « mobile dans l'unité de temps »; poi quella del moto vario stabilendo la formola $v=\frac{ds}{dt}$. In seguito si parla della *rappresentazione geometrica* della velocità al tempo t, e, a mio parere, con una inesattezza dove si chiarisce il significato della frase *longueur égale à v* e si fa

credere che questa lunghezza possa dipendere dall'unità di spazio, ciò che non è, perchè se anche varia con questa unità il numero che misura $\frac{ds}{dt}$, non varierà la lunghezza del segmento corrispondente, dovendo s e v di necessità essere riferiti alla medesima unità.

Il medesimo metodo è seguito nel *Cours de Mécanique* dello STURM ai n. 155 a 159 del v. I, ma poi nella lezione 18ª ove si tratta *du mouvement curviligne et des forces qui le produisent*, è data nuovamente la definizione di velocità nel moto vario e curvilineo partendo dalla 1ª legge del moto, e la formola $v = \frac{ds}{dt}$ è ritrovata, considerando v come risultante delle velocità lungo i tre assi delle proiezioni del punto mobile, e quindi, implicitamente almeno, considerando la velocità come un segmento.

Nel *Treatise of natural philosophy* dei Prof. W. THOMSON e P. G. TAIT è detto (V. I, P. I, pag. 11): « The rate of motion of a point, « or its rate of change of position, is called its *velocity* » e in seguito: « uniform velocity is measured by the space passed over in unit of « time »; e poi nel caso del moto vario rettilineo (pag. 12): « we define « the exact velocity at any instant as the space which the point would « have described in one second, if for one second its velocity remained « unchanged. » Definizione questa oscura parecchio, e più che oscura difettosa perchè, dopo tutto, non si sa ancora che sia, nè che possa essere la velocità, nè quindi si può capire che voglia significare la frase: *remained unchanged;* e questo errore è ripetuto in tanti altri trattati che sarebbe troppo lungo e inutile il citare.

E, nè le frasi citate, nè il seguito possono farci capire se nella mente degli autori l'ente *velocità* voglia considerarsi come un numero o come un segmento, come lo mostra il seguente periodo (pag. 13):

« The preceding definition of velocity is equally applicable whether « the point move in a straight or curved line; but since in the latter « case the direction of motion continually changes, the mere amount « of the velocity is not sufficient completely to describe the motion, « and we must have in every such case additional data to remove the « uncertainty, » nel quale, a mio credere, la prima parte è in contraddizione colla seconda. Nemmeno il modo con cui è tolta l'incertezza accennata serve a schiarir meglio il concetto di velocità, giacchè si parla della velocità come risultante delle tre lungo gli assi e quindi quella che era prima un numero, poi quasi diventa un segmento; ma in ogni modo una definizione chiara dell'ente velocità manca affatto.

Non vale la pena di citare altri autori che mi è capitato di leggere, perchè di nessuna autorità; e di esaminarne altri di più recenti l'op-

portunità mi è mancata; ma probabilmente persisterebbe in tutti la medesima incertezza di metodo che ha porto occasione all'egregio Prof. NOVARESE di formulare quelle domande.

***

Ora sembra a me, che, riferendoci prima alla cinematica, il dubbio non vi possa essere, e la velocità s'abbia a definire addirittura come un segmento. La cinematica evidentemente deve seguire il metodo della geometria, dove la definizione degli enti, che si fa ordinariamente per postulati, ha, sotto un certo aspetto, in sè un qualche cosa di arbitrario. E per ciò, in cinematica, basterà che questo ente, il quale vogliamo chiamare velocità, sia definito così da non portare poi contraddizione coi risultati dell'esperienza.

Credo però che, specialmente sotto l'aspetto didattico, abbia molta importanza il modo con cui la definizione stessa è presentata, allo scopo che in chi legge, o in chi ascolta, chiaro se ne faccia subito il concetto.

Ed ecco, a parer mio, in che modo a questa definizione occorrerebbe arrivarci.

Accennato dapprima che in cinematica il moto si definisce come un fatto geometrico, determinando le coordinate del punto, che vien detto *mobile*, come funzioni di una variabile indipendente a cui si dà il nome di *tempo*, cioè per mezzo di equazioni della forma

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t);$$

e fissato che, in vista specialmente delle applicazioni, vale a dire perchè il moto così definito possa corrispondere al moto reale di un punto materiale, le funzioni x, y, z della variabile t debbano, almeno in un certo intervallo relativo alla stessa variabile, ammettere le derivate prime e seconde e essere insieme a queste continue, e, in generale, finite, si studierà dapprima il moto definito dalle equazioni semplici

$$x = mt + a, \qquad y = nt + b, \qquad z = pt + c,$$

dove m, n, p, a, b, c sono costanti; e dimostrato che la traiettoria è rettilinea e che il punto in essa si sposta di segmenti eguali in tempi eguali, ragione per cui il moto verrà detto *uniforme*, si chiamerà *velocità il segmento percorso dal punto nell'unità di tempo,* segmento che avrà per misura:

$$u = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2},$$

e la cui direzione farà cogli assi angoli i cui coseni saranno:

$$\frac{m}{u}, \quad \frac{n}{u}, \quad \frac{p}{u}.$$

Poi passando al moto definito dalle equazioni generali

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad z = z(t)$$

e dimostrato che esso non sarà in generale uniforme, e si dirà perciò *moto vario*, si chiamerà *velocità media* nel tempo Δt successivo a t, quella velocità che corrisponderebbe ad un moto uniforme che portasse nel tempo Δt il punto mobile dalla posizione iniziale (corrispondente al valore t) alla posizione finale (corrispondente al valore $t + \Delta t$) lungo la retta che congiunge i due punti. E così facendo si manterranno incluse nell'ente velocità le due caratteristiche di grandezza e direzione che servono a definirla, mentre che col definire la velocità media, come ordinariamente si fa, supponendo che il moto si faccia uniforme, ma lungo la traiettoria che il mobile di fatto percorre, si viene a fissare dell'ente velocità media una caratteristica sola, o a definirla, come osserva giustamente il Prof. NOVARESE in una Nota al suo scritto, come « un arco di linea del quale sarebbe individuata la sola lunghezza », il che equivale a non definirla affatto.

E osservando in seguito che questa velocità media avrà per misura

$$v_m = \frac{1}{\Delta t}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\,,$$

essendo Δx, Δy, Δz gli incrementi di x, y, z per l'incremento Δt del tempo, e che la sua direzione sarà fissata dai coseni

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}\,, \qquad \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}\,, \qquad \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}\,,$$

si accennerà che queste quantità, per le ipotesi fatte circa alla natura delle funzioni x, y, z, ammetteranno sempre dei limiti per $\Delta t = 0$, limiti che corrisponderanno alle altre:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,,$$

$$\frac{dx}{ds}\,, \qquad \frac{dy}{ds}\,, \qquad \frac{dz}{ds}\,;$$

e senza dare ancora un significato a questi limiti si dimostrerà il

TEOREMA. — *Se considerando un punto animato da un moto definito dalle equazioni*

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,, \qquad z = z(t)$$

dove x, y, z sono funzioni continue, e generalmente finite, insieme alle loro derivate prime in un dato intervallo che comprenda il valore

$t = t_0$, e si suppone che, a partire da questo valore, il moto si trasformi in rettilineo uniforme, è necessario (se si vogliono continue le derivate delle funzioni x, y, z) che questo movimento abbia per velocità il segmento la cui misura è

$$v = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0)}\,,$$

e la cui direzione fa cogli assi angoli che hanno per coseni

$$\frac{x'(t_0)}{v}\,, \quad \frac{y'(t_0)}{v}\,, \quad \frac{z'(t_0)}{v}\,,$$

e che quindi è diretto secondo la tangente alla traiettoria nel punto $t = t_0$.

E infatti le equazioni che possono servire a definire questo moto complesso saranno pei valori di t precedenti a t_0 (t_0 incluso):

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad z = z(t)\,,$$

e pei valori di t seguenti a t_0 (t_0 incluso) potranno essere della forma:

$$x = mt + a, \quad y = nt + b\,, \quad z = pt + c\,,$$

dove m, n, p, a, b, c sono costanti.

La velocità del moto definito dal 2° sistema di equazioni sarà data in grandezza da

$$u = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\,,$$

e in direzione per mezzo dei coseni

$$\frac{m}{u}\,, \quad \frac{n}{u}\,, \quad \frac{p}{u}\,.$$

Ma se vogliamo che il primo sistema di equazioni e il secondo definiscano x, y, z come funzioni di t continue ecc., bisognerà che sia

$$x(t_0) = mt_0 + a\,, \quad y(t_0) = nt_0 + b\,, \quad z(y_0) = pt_0 + c\,;$$

e fra le derivate, pel valore $t = t_0$, dovranno esistere le relazioni:

$$m = x'(t_0)\,, \quad n = y'(t_0)\,, \quad p = z'(t_0)\,;$$

e perciò sarà:

$$u = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0)} = \left(\frac{ds}{dt}\right)_0 = v\,,$$

e

$$\frac{m}{u} = \frac{x'(t_0)}{v} = \left(\frac{dx}{ds}\right)_0$$

$$\frac{n}{u} = \frac{y'(t_0)}{v} = \left(\frac{dy}{ds}\right)_0$$

$$\frac{p}{u} = \frac{z'(t_0)}{v} = \left(\frac{dz}{ds}\right)_0$$

e il teorema è dimostrato.

E dopo questo teorema, d'accordo coi concetti che si hanno in geometria circa i valori limiti delle quantità variabili, sarà naturale di chiamare velocità del moto vario al tempo t_0, la velocità del moto uniforme considerato nel teorema precedente, la qual velocità sarà dunque un *segmento* la cui direzione sarà quella della tangente alla traiettoria nel punto considerato, e che potrà dirsi *direzione del moto in quell'istante,* e la cui lunghezza verrà data da $\left(\frac{ds}{dt}\right)_0$, lunghezza che dipenderà dalla sola unità di tempo.

La velocità quindi verrà a esser considerata, cosa che generalmente, del resto, si fa, come un'attitudine al moto, per il fatto che realmente quel dato segmento cui corrisponde non sarà percorso dal punto mobile, altro che nel caso in cui il moto dall'esser vario si trasformi in rettilineo-uniforme.

E a scanso di equivoci non credo superfluo il notare che l'*ente velocità nel moto vario* avrà esistenza soltanto per dato e fatto di queste considerazioni, e che prima di esse la frase *velocita nel moto vario* doveva intendersi priva affatto di significato.

Noto ancora che l'ente velocità essendo definita da due caratteristiche, la grandezza e la direzione, si dovrà chiamar *costante* la velocità, quando lo siano questi due elementi; e che quindi se uniforme vorrà dirsi quel moto in cui la velocità è costante, dovrà sotto questa denominazione intendersi incluso quel solo movimento rettilineo in cui gli spazi sono proporzionali ai tempi, e che una parola nuova occorrerà per indicare quel moto per linee curve nel quale in tempi eguali il mobile percorre archi di egual lunghezza, moto che è pure generalmente chiamato uniforme.

Nè si dovrà confondere poi l'ente velocità colla sua misura, la quale sarà il numero $\frac{ds}{dt}$ che comparirà nelle formole (numero che soltanto per brevità si continuerà a chiamare *velocità*, invece di dirlo *misura della velocità*); precisamente come nelle formole figura come un numero il raggio ρ di curvatura di una linea, mentre esso per ogni punto di questa ha non solo una lunghezza, ma anche una direzione, o meglio, una posizione determinata.

***

Tutto ciò che è stato detto potrà valere per la cinematica. Passando ora alla meccanica, e più specialmente alla dinamica, lo stabilire una definizione dell'ente velocità è certo più difficile e forse anche impossibile, giacchè l'osservazione del Poisson, citata dal Prof. Novarese, « la vitesse d'un point matériel en mouvement est une chose qui réside « dans ce point, dont il est animé, qui le distingue actuellement d'un « point matériel en repos et n'est pas susceptible d'une autre définition » mi sembra giusta sotto ogni aspetto, giacchè il concetto fisico di velocità ha troppa attinenza con quello di forza perchè sia sperabile di poterlo definire.

Meglio forse che in altro modo è il definirla, colla frase usata dal Roiti e da tanti altri, come l'attitudine che ha un punto materiale in movimento a percorrere in un certo tempo uno spazio maggiore o minore; ma come ognun vede, questa come tante altre definizioni che, specialmente in passato, sono state accettate nella scienza, e che, per così dire, si riferiscono al più o al meno e non al quanto, non è una definizione abbastanza soddisfacente.

Però considerando la cosa sotto l'aspetto dell'insegnamento, e non dal lato filosofico, e rimanendo nel puro campo della meccanica razionale, mi pare che si possa accettare la definizione medesima che è stata data in cinematica, perchè nel moto uniforme essa si riferisce a un fatto reale, e nel caso del moto vario la prima legge del moto, giustifica pienamente quella definizione coll'ammettere che un corpo in moto, quando cessino le cause acceleratrici o ritardatrici, si muove di moto uniforme e in linea retta, appunto con quella velocità che è contemplata nel teorema che è stato or ora dimostrato, giacchè il fenomeno soddisfa certamente alle condizioni di continuità che vi sono accennate.

Concludendo dunque dovrà chiamarsi, cosa che generalmente tutti fanno « velocità in un dato istante nel moto vario quella che assumerebbe il corpo se in quell'istante il moto si facesse rettilineo-uniforme » e quindi in ogni caso la velocità viene a concepirsi come un segmento, cioè come un tratto rettilineo di direzione determinata che, nell'unità di tempo, il punto materiale o percorre difatti, o ha l'attitudine a percorrere.

Carrara, 4 marzo 1891.

Osservazioni al « Trattato d'Aritmetica di G. Bertrand. »

(*Traduzione italiana di* G. NOVI, 1862).

Sul trattato di Aritmetica del sig. Bertrand sono stati modellati tutti i trattati d'aritmetica finora pubblicati; in questi si trovano conservate (anzi il più delle volte aumentate) le inesattezze esistenti nel trattato del Bertrand. Credo cosa non inutile rilevare le principali di queste inesattezze.

Pag. 1, N. 1.

« Si chiama *grandezza* o *quantità* tutto ciò che è suscettivo di aumento o di diminuzione ». — Segue da ciò che una grandezza *data*, e quindi invariabile, come p. e. 3 metri, non è una grandezza, o almeno cessa di esserlo quando è data. — Che le ordinarie grandezze, godano della proprietà che datane una, di una determinata specie, se ne possano pensare infinite altre, della medesima specie, che si ottengono dalla prima facendola variare in modo continuo o discontinuo, è vero; ma non è vero che tale proprietà sia caratteristica, cioè che su essa sola si possa basare la teoria di un gruppo di grandezze, perchè non si saprebbe se queste si possono sommare, se ammettono o no le grandezze multipli e summultipli e entro quali limiti ecc.

Pag. 1, N. 3.

« Misurare una quantità significa determinarla con precisione, paragonandola ad un'altra quantità della stessa natura che si considera come conosciuta ».

È chiaro che non può essere misurata che una grandezza data, qualunque sia il modo col quale è data. Allora se misurare vuol dire *determinare con precisione*, che cosa significa *determinare una cosa data?* E del resto ammesso anche, per un momento, che il concetto di misura sia in quel modo esattamente espresso, una grandezza non può mai dirsi *determinata* dalla sua misura, perchè se un sol numero a misura una grandezza A mediante l'unità U, sono infinite le grandezze, della medesima specie di A, che sono misurate mediante U dal numero a.

Il periodo sopra riportato del sig. Bertand non può, inoltre, esser ritenuto come esprimente la *definizione* di misura, poichè per dire che cosa si intenda per misura fa uso del concetto di *paragone* che ha pure bisogno di esser definito. Di più se l'uomo *intuisce in un sol modo* il concetto di misura, intuisce in più modi il concetto di paragone, tanto che credo sia impossibile dire che cosa si intenda per paragonare due grandezze della medesima specie.

Pag. 2, N. 5.

Dopo aver dato la definizione di numero astratto e concreto, e aver detto che la 2ª di queste denominazioni può far nascere un'idea inesatta — perchè realmente un numero concreto è una quantità — aggiunge. « Quando si dice 7 litri il numero è 7; la parola litro completa ma non modifica l'idea ».

La parola litro non completa nulla perchè la parola *sette* è il nome di una speciale quantità — il numero — che è univocamente determinata dal suo nome; invece, la parola litro, modifica completamente l'idea espressa dalla parola *sette,* perchè, mentre 7 indica un numero, 7 litri indica una grandezza di specie diversa dalla grandezza numero.

Pag. 9, N. 15.

« L'*addizione* consiste nella riunione di due o molte quantità della stessa specie in una sola ».

E riunire che cosa significa? Potendosi prendere la parola *riunire* in uno dei tanti sensi che le sono propri, si potrebbe p. e., dire che la somma dei numeri 4; 5; 17 è 4517!

Pag. 21, N. 28.

« Allorchè una quantità si ripete un numero intero di volte, si dice che si moltiplica per questo numero intero ».

Anche qui che cosa significa *ripetere?* E posto che ripetere p. e. a, 3 volte significhi sommare a con a ed alla somma aggiungere ancora a, è inutile dire ripetere un numero *intero* di volte, perchè, in quel senso, non si potrà mai ripetere una quantità $^3/_4$ di volta.

Pag. 122, N. 151.

« Teorema I. — Una frazione è eguale al quoziente della divisione del suo numeratore pel suo denominatore ».

« Per esempio $^{15}/_7$ è il settimo di 15: infatti, il settimo di 15 contiene il settimo di ciascuna delle 15 unità che compongono 15, cioè a dire 15 volte $^1/_7$ ».

Quando dice che il settimo di 15 contiene il settimo di ciascuna delle 15 unità che compongono 15, ammette come dimostrato — e precedentemente non è stato fatto — che *la settima parte di una somma è eguale alla somma delle settime parti dei suoi termini.* Quando dice « ..... cioè a dire 15 volte $^1/_7$ » ammette che $^1/_7$ sia il quoziente della divisione di 1 per 7 e che 15 volte $^1/_7$ faccia appunto $^{15}/_7$, il che equivale ad ammettere *due volte* come vero il teorema da dimostrarsi.

Del teorema, non dimostrato, che

$$\frac{a}{n} = \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \dots \text{ se } a = b + c + \dots,$$

si serve l'A. implicitamente anche nei teoremi che seguono quello ora riportato, teoremi che costituiscono il fondamento della teoria delle frazioni e che in tal modo non sono dimostrati che apparentemente.

C. Burali-Forti.

Sul concetto di numero.

Nota I di G. Peano.

La natura delle varie specie di numeri è più o meno ampiamente svolta in ogni trattato di aritmetica e di algebra; e questa questione fu l'oggetto di ricerche speciali di innumerevoli matematici e filosofi. Molte delle discussioni fatte si riducono a semplici logomachie. Ma negli ultimi anni, per opera di illustri scienziati, che menzioneremo in seguito, la questione fu trattata con strumenti sempre più perfezionati, e posta su basi più solide; e se al giorno d'oggi sussiste ancora qualche contraddizione fra le opinioni di questi autori, e qualche incertezza, già però si può intravederne la soluzione completa.

Nei miei *Arithmetices principia* espressi in formole di logica la teoria dei numeri interi positivi, dei fratti e degli irrazionali. Introducendo però qualche cenno della teoria delle operazioni (funzioni), alcune proprietà dei numeri si possono far dipendere da altre più generali, e trattare sotto forma più concisa. Nella presente Nota intendo appunto di trattare questi punti, e di aggiungere tutte quelle osservazioni e discussioni che paionmi utili su questo argomento. Questa Nota fa seguito a quella di pag. 24, e ne conserva l'ordinamento. Ogni § contiene una serie di formole, intelligibili a chi ha lette le formole precedenti. Però esse sono seguite da opportune osservazioni.

§ 1. — Corrispondenze.

Essendo a e b delle classi, con $a \backslash b$ intenderemo « segno che messo dopo un a produce un b. »

1. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, \supset \,.\!\cdot\!.\, \alpha \,\varepsilon\, a \backslash b \,.=:\, x \,\varepsilon\, a \,.\supset_x .\, x\alpha \,\varepsilon\, b.$

2. » $.\, \alpha \,\varepsilon\, a \backslash b \,.\, x, y \,\varepsilon\, a \,.\, x = y :\supset .\, x\alpha = y\alpha$

3. » » $:\supset .\, a\alpha = \overline{y \,\varepsilon}\, (x \,\varepsilon\, a \,.\, x\alpha = y : -=_x \Lambda)$

Osservazioni.

Questo § contiene alcuni cenni sulle corrispondenze. Si ha una corrispondenza dalla classe a alla classe b, se ad ogni individuo della classe a corrisponde un individuo y della classe b. Queste parole non costituiscono una definizione, poichè l'idea di corrispondenza, o rappresentazione, o operazione, o funzione, è del tutto semplice e primitiva. L'ente corrispondente ad x si indica spesso facendo precedere x da un segno (alcune parole), come: $\operatorname{sen} x$, $\log x$, la grandezza di x, il padre di x, ecc.; ovvero facendo seguire x da un segno, come: $x!$, x^2, e i due ultimi esempi precedenti, tradotti in latino.

Invece della espressione « segno che premesso ad un a produce un b » scriveremo b/a; e scriveremo $a\backslash b$ invece delle parole « segno che messo dopo un ente qualunque della classe a, lo trasforma in un b. » Così si ha « $\log \varepsilon \mathrm{q}/\mathrm{Q}$ » che significa « log è un segno che messo davanti a un numero positivo produce un numero reale » ossia « qualunque sia il numero positivo x, $\log x$ è un numero reale »; e si ha: $! \varepsilon \mathrm{N}\backslash\mathrm{N}$ che significa « il segno ! messo dopo un numero intero positivo produce un numero intero positivo. » In questa Nota ci conviene considerare solamente i segni $a\backslash b$. Quindi:

1° « Essendo a e b due classi, dire che α è un $a\backslash b$ significa dire che, preso ad arbitrio un individuo x nella classe a, la scrittura $x\alpha$ rappresenta un individuo della classe b. »

Questa proposizione si può esprimere in simboli di logica. L'ipotesi è « a e b sono classi » che si indica con $a, b \varepsilon \mathrm{K}$. La tesi è l'uguaglianza fra la proposizione « α è un $a\backslash b$, » che si indica con « $\alpha \varepsilon a\backslash b$, » e la « qualunque si sia x nella classe a, $x\alpha$ è un b, » che si indica con « $x \varepsilon a \,.\, \supset_x .\, x\alpha \varepsilon b$. » Sostituendo si ha la prop. 1 sopra scritta in formole.

Affinchè α rappresenti effettivamente una operazione sugli a, è necessario che, eseguita su certi enti eguali, produca risultati eguali, ossia:

2° « Chiamando a e b due classi, se α è un $a\backslash b$, e se x e y sono due individui della classe a, eguali fra loro, sarà $x\alpha = y\alpha$. »

Così, essendo m ed n due numeri interi, colla scrittura $\frac{m}{n}$ possiamo indicare o « l'insieme dei due numeri scritti l'uno sopra l'altro » o « il numero razionale così indicato. » Nel primo caso ha significato la parola « il numeratore della frazione »; nel secondo caso questa espressione non ha più significato. Analogamente, intesa al modo solito la eguaglianza di due vettori, si potrà parlare, p. e., della lunghezza di un vettore, ma le espressioni « origine d'un vettore », « retta che lo contiene », non rappresentano funzioni d'un vettore.

Le proposizioni 1 e 2 esprimono le proprietà fondamentali delle operazioni $a \backslash b$, e si possono assumere come definizione di questo segno.

Se α è un segno di operazione che trasforma gli a in b, con $a\alpha$ intenderemo, seguendo il Dedekind (1), l'insieme degli enti $x\alpha$, ove x assume tutti i valori nella classe a. Questa definizione si può enunciare in simboli.

Avendo a, b, α il solito significato, essa si può esprimere: « Affermare che y è un $a\alpha$ significa che esiste un individuo (almeno) x della classe a tale che $x\alpha$ valga y, » ossia:

$$(y \,\varepsilon\, a\alpha) = (\text{esiste un } x \text{ della classe } a \text{ tale che } x\alpha = y).$$

Il secondo membro di questa eguaglianza logica si può esprimere « dire che x è un a e che $x\alpha = y$ non è, rispetto ad x, assurdo, » ossia:

$$x \,\varepsilon\, a \,.\, x\alpha = y : - =_x \Lambda.$$

Quindi la definizione ad enunciarsi si scrive:

$$(y \,\varepsilon\, a\alpha) = (x \,\varepsilon\, a \,.\, x\alpha = y : - =_x \Lambda).$$

E volendo avere nel primo membro non la proposizione « y è un $a\alpha$ » ma la sola classe $a\alpha$, basta trasportare il segno $y\,\varepsilon$ dal primo nel secondo membro, coprendolo con una lineetta (Formule di Logica, § 5), e si avrà:

$$a\alpha = \overline{y\,\varepsilon}\,(x \,\varepsilon\, a \,.\, x\alpha = y : - =_x \Lambda)$$

« $a\alpha$ è l'insieme degli enti y tali che esiste un x appartenente alla a, e il cui corrispondente è y. »

Si ha così la prop. 3.

In conseguenza, ricordando le notazioni del § 3 dei *Principii di Logica mat.* (pag. 3):

N^2 significa « i numeri quadrati, » cioè « i quadrati dei numeri interi »;
N^3 » « i numeri cubi »;
$N!$ » « il sistema dei numeri 1, 2, 6, 24, 120, ecc. »

Generalizzando alquanto questa notazione, si ha:

$a \,\varepsilon\, \mathrm{n} \,.\, \supset .\, a + \mathrm{N} =$ (numero intero maggiore di a),
$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{n} \,.\, \supset .\, a + \mathrm{n}b =$ (numeri congrui ad a rispetto al modulo b).

Se s è una classe, Ks significa l'insieme delle infinite classi della

---

(1) *Was sind und was sollen die Zahlen?*

forma xs, ove x sia una classe qualunque. Ma le classi xs sono le classi contenute in s; quindi:

$$\mathrm{K}s = (\text{classi contenute in } s).$$

Si ha parimenti:

$$\log \mathrm{Q} = \mathrm{q}\,,$$
$$\operatorname{sen} \mathrm{q} = (\text{l'intervallo da } -1 \text{ a } +1).$$

I segni di funzione godono di numerose proprietà; veggasi il § 2 della già menzionata opera del Dedekind, i miei *Arithmetices principia* pag. XIII, e la *Démonstr. de l'intégrabilité* etc., pag. 189.

§ 2. — Numeri interi e positivi (N).

Il segno N si legga *numero* (*intero e positivo*),
» 1 » *uno*.
Essendo a un numero, $a+$ si legga *il successivo di a*.

Proposizioni primitive.

1. $1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}$
2. $+ \,\varepsilon\, \mathrm{N}\backslash\mathrm{N}$
3. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, a+ = b+ :\supset.\, a = b$
4. $1 - \varepsilon\, \mathrm{N}+$
5. $s \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, 1 \,\varepsilon\, s \,.\, s+ \supset s :\supset.\, \mathrm{N} \supset s.$

Conseguenze immediate.

$$\left.\begin{array}{ll} 6. & a \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.\, a+ \,\varepsilon\, \mathrm{N} \\ 7. & a, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, a = b :\supset.\, a+ = b+ \end{array}\right\} [\mathrm{P}2 = \mathrm{P}6 \frown \mathrm{P}7]$$

$$8.\quad a, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset:\, a = b \,.=.\, a+ = b+ \qquad [= \mathrm{P}7 \frown \mathrm{P}3]$$

$$9.\quad \text{»} \quad .\, a - = b :\supset.\, a+ - = b+ \qquad [= \mathrm{P}3]$$

$$10.\quad s \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, 1 \,\varepsilon\, s \,.\, \mathrm{N} - s - = \Lambda :\supset\therefore x \,\varepsilon\, s \,.\, x+ - \varepsilon\, s : - =_x \Lambda \qquad [= \mathrm{P}5]$$

Osservazioni.

I primi numeri che si presentano, e con cui si formano tutti gli altri, sono gli interi e positivi. E la prima questione si è: possiamo noi definire l'unità, il numero, la somma di due numeri? La definizione comune di numero, che è l'Euclidea, « numero è l'aggregato di più unità, » può servire come schiarimento, ma non è soddisfacente come definizione. Invero un bambino, a pochi anni usa le parole *uno*, *due*,

tre, ecc.; in seguito adopera la parola *numero;* solo molto più tardi nel suo dizionario comparisce la parola *aggregato.* E nello stesso ordine, come insegna la filologia, ci sono presentate queste parole nello sviluppo delle lingue ariane. Quindi, dal lato pratico la questione parmi risoluta; ossia, non conviene in un insegnamento dare alcuna definizione del numero, essendo questa idea chiarissima agli allievi, e ogni definizione non avendo che l'effetto di confonderla. E di questa opinione è pure la maggior parte degli autori.

Dal lato teorico, per decidere la questione della definizione, occorre sia detto prima di quali idee ci possiamo servire. Qui si suppongono note le sole idee rappresentate dai segni $\frown$ (e), $\smile$ (o), $-$ (non), ε (è), ecc., di cui si è trattato nella Nota precedente. E allora *il numero non si può definire,* poichè è evidente che comunque si combinino fra loro quelle parole non si potrà mai avere una espressione equivalente a *numero.* Però, se il numero non si può definire, si possono enunciare quelle proprietà da cui derivano come conseguenza tutte le innumerevoli e ben note proprietà dei numeri.

I concetti, adunque, che non definiamo sono quelli di *numero,* N, di *unità,* 1, e di *successivo d'un numero* a, che qui si indica per un istante con $a+$. Questi concetti non si possono ottenere per deduzione; bisogna ottenerli per induzione (astrazione). Il successivo di a si è qui indicato con $a+$, invece che con $a+1$, come d'uso; e ciò si è fatto per indicare con un segno solo, $+$, l'operazione fondamentale « successivo di. » Del resto nel § seguente, definita la somma $a+b$ di due numeri, ne risulta che $a+1$ vale appunto $a+$, cioè il successivo di a, e così si ritorna alle solite notazioni.

Le proposizioni primitive, vale a dire le proposizioni esprimenti le più semplici proprietà dei numeri interi, da cui derivano tutte le altre, sono:

1. « L'unità è un numero. »
2. « Il segno $+$ messo dopo un numero produce un numero. »
3. « Se a e b sono due numeri, e se i loro successivi sono eguali, anche essi sono eguali. »
4. « L'unità non segue alcun numero. »
5. « Se s è una classe, contenente l'unità, e se la classe formata dai successivi di s è contenuta in s, allora ogni numero è contenuto nella classe s. »

Di queste proposizioni la 1 non ha bisogno di schiarimento. La P2 equivale, per quanto si è detto nel § prec., all'insieme delle due:

6. « Se a è un N, anche $a+$ è un N. »
7. « Se a e b sono N, fra loro eguali, anche i loro successivi sono eguali. »

L'insieme delle prop. 3 e 7 vale:

8. « Essendo a e b due numeri, dire che $a = b$ significa dire $a + = b +$. »

È chiaro che $P8 = P3 \frown P7$. Possiamo però, per semplice esercizio, esaminare con quali trasformazioni si passi da queste due ultime alla prima. La prop. 7

$$a, b \varepsilon N . a = b : \supset . a + = b + ,$$

in virtù d'una formola (Logica, § 2 P19), si può pure scrivere

7′ $\quad a, b \varepsilon N . \supset : a = b . \supset . a + = b +$

« Essendo a e b due numeri, allora, se essi sono eguali, anche i loro successivi sono eguali. »

La prop. 3, colla stessa trasformazione diventa:

3′ $\quad a, b \varepsilon N . \supset : a + = b + . \supset . a = b.$

Allora per un'altra formola (Logica, § 2 P18), l'insieme delle 7′ e 3′, che hanno la stessa ipotesi, equivale alla proposizione sola:

8′ $\quad a, b \varepsilon N . \supset .\cdot. a = b . \supset . a + = b + : a + = b + . \supset . a = b$

« Essendo a e b due numeri, allora da $a = b$ si deduce $a + = b +$, e viceversa. » Quindi (Logica, § 2 P1), la 8′ si trasforma nella 8.

La prop. 3 dice che l'operazione $+$ è simile, ossia se i risultati sono eguali, anche i numeri da cui si è partito lo sono. Trasportando la tesi nel primo membro, e la seconda parte dell'ipotesi nel secondo membro, cosa permessa (*Formole di logica*, § 4 P28; vedasi pure *Principii di logica*, § 4 P11), si ottiene la

9. « Se a e b sono numeri diseguali, anche i loro successivi sono diseguali. »

La prop. 5 si può pure enunciare:

« Se s è una proprietà (dei numeri), e se l'unità ha questa proprietà, e se tutte le volte che un numero ha questa proprietà, anche il successivo la possiede; allora ogni numero ha la proprietà s. »

O ancora:

« La classe dei numeri è la più piccola delle classi contenenti l'unità e contenenti il successivo d'ogni ente che vi appartiene. »

Trasportando convenientemente delle proposizioni dall'uno all'altro membro, essa diventa:

10. « Se s è una classe che contiene l'unità, ma non tutti i numeri (vale a dire se esistono degli N che non sono degli s), allora esiste un individuo x della classe s, il cui successivo $x +$ non appartiene più a questa classe. »

Questa proprietà è comunemente chiamata la *regola di induzione matematica*. Essa è intuitiva, e non si può ridurre ad altre più semplici.

Le proposizioni primitive che precedono sono dovute al DEDEKIND, op. cit. n. 71; c'è però una lieve differenza nell'enunciato della nostra prop. 5 (che è la β del DEDEKIND), sulla quale non ci arresteremo. Esse nella sostanza sono identiche a quelle da me esposte negli *Arith. princ.*, salvochè l'introduzione del segno $a \backslash b$ permette di semplificarne la forma.

Queste proposizioni esprimono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè gli enti di un sistema si possano far corrispondere univocamente alla serie degli N; e si possono anche enunciare così:

1. Ad un ente particolare del sistema si sia dato il nome 1.
2. Sia definita un'operazione per cui ad ogni ente a del sistema ne corrisponda un'altro, $a+$, pure del sistema.
3. E che due enti, i cui corrispondenti sono eguali, siano eguali.
4. L'ente chiamato 1 non sia il corrispondente di alcuno.
5. E infine che essa sia la classe comune a tutte le classi s che contengono l'individuo 1, e che, contenendo un individuo, contengono pure il corrispondente.

È facile il vedere che queste condizioni sono indipendenti. Sulle prime due non v'ha dubbio. La 3 non è verificata per ogni operazione, essendovi delle operazioni (come elevazione a quadrato, integrazione, ecc.) che non vi soddisfano.

Che la 4 non sia conseguenza delle precedenti, risulta dal fatto che la classe dei numeri interi, positivi negativi e compreso lo zero, soddisfa alle prime 3 e non alla 4.

Per formare una classe di enti che soddisfino alle 1, 2, 3 e 4, e non alla 5, basta al sistema degli N aggiungere un altro sistema di enti che soddisfino alle condizioni 2, 3 e 4; così la classe formata dai numeri interi positivi N, e dai numeri immaginarii della forma $i+$N, cioè che si ottengono aggiungendo all'unità immaginaria un numero intero positivo qualunque, soddisfa alle condizioni precedenti la s e non a questa. Per far vedere che la 4 non è nemmeno conseguenza delle 1, 2, 3 e 5, si considerino le radici dell'equazione $x^n = 1$; si chiami *prima radice* (ovvero 1) la radice immaginaria avente il più piccolo argomento $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$; e si chiami successiva d'una radice a il prodotto di a per la prima radice; saranno verificate le condizioni 1, 2, 3 e 5, e non la 4, essendo la prima radice anche la successiva della n^{ma}. Lo stesso esempio si può enunciare sotto forma volgare coi nomi delle *ore;* l'ora prima è la successiva della 12ª. Perciò gli enti per cui sono verificate le condizioni 1, 2, 3 e 5, ma non la 4, non corrispondono univocamente ai numeri interi, ma, si potrebbe dimostrare, sono in numero limitato. Per vedere in fine come la condizione 3ª non sia conseguenza delle 1, 2, 4 e 5, si considerino i numeri 1, 2 e 3, e si chiami successivo di 1

il 2, successivo di 2 il 3, e successivo di 3 il 3 stesso. Saranno verificate tutte le condizioni, tolta la 3ª.

Fra quanto precede, e quanto dice il DEDEKIND, vi ha una contraddizione apparente, che conviene subito rilevare. Qui non si definisce il numero, ma se ne enunciano le proprietà fondamentali. Invece il DEDEKIND definisce il numero, e precisamente chiama numero ciò che soddisfa alle condizioni predette. Evidentemente le due cose coincidono.

§ 3. — ADDIZIONE.

Definizioni.

1. $s \varepsilon \mathrm{K} . \alpha \varepsilon s \backslash s . a \varepsilon s : \supset . a \alpha 1 = a \alpha$

2. » » » $. b \varepsilon \mathrm{N} : \supset . a(b +) = (a \alpha b) \alpha .$

Teorema.

3. $s \varepsilon \mathrm{K} . \alpha \varepsilon s \backslash s . a \varepsilon s . b \varepsilon \mathrm{N} : \supset . a \alpha b \varepsilon s$

[(1) Hp. $b = 1 . \mathrm{P1} : \supset . \mathrm{Ts.}$

(2) Hp. $a \alpha b \varepsilon s . \mathrm{P2} : \supset . a \alpha (b +) \varepsilon s .$

(1) $\frown$ (2) $\frown$ § 2 P5 . $\supset$. P3]

Conseguenze.

4. $a \varepsilon \mathrm{N} . \supset . a + 1 = a +$ $\left[\begin{pmatrix} \mathrm{N}, + \\ s, \alpha \end{pmatrix} \mathrm{P1} = \mathrm{P4}\right]$

5. $a, b \varepsilon \mathrm{N} . \supset . a + (b +) = (a + b) +$ [» P2 = P5]

5′ » $. \supset . a + (b + 1) = (a + b) + 1$

6. » $. \supset . a + b \varepsilon \mathrm{N}$ [» P3 = P6]

Teorema.

7. $s \varepsilon \mathrm{K} . \alpha \varepsilon s \backslash s . a \varepsilon s . b, c \varepsilon \mathrm{N} : \supset . (a \alpha b) \alpha c = a \alpha (b + c)$

[(1) Hp. $c = 1 . \mathrm{P1} . \mathrm{P2} : \supset . \mathrm{Ts.}$

(2) Hp. $(a \alpha b) \alpha c = a \alpha (b + c) : \supset . \big((a \alpha b) \alpha c\big) \alpha = \big(a \alpha (b + c)\big) \alpha$

(3) » $: \supset . (a \alpha b) \alpha (c + 1) = a \alpha (b + c + 1$

Hp. (1) . (3) : $\supset$. Ts.]

Teorema.

8. $a, b, c \varepsilon \mathrm{N} . \supset . (a + b) + c = a + (b + c)$ $\left[\begin{pmatrix} \mathrm{N}, + \\ s, \alpha \end{pmatrix} \mathrm{P7} = \mathrm{P8}\right.$

Teorema.

9. $a, b \varepsilon \mathrm{N} . \supset . a + b = b + a .$

Osservazioni.

Date le idee precedentemente introdotte, possiamo definire l'addizione. Prima comincieremo dal definire le operazioni ripetute. Nelle prop. 1, 2, 3 si suppone che s sia una classe; α un segno d'operazione che ad ogni s faccia corrispondere pure un s; e a sia un s. Allora, essendo b un N, con $a \alpha b$ vogliamo indicare ciò che si ottiene eseguendo su a l'operazione α, b volte di seguito. In conseguenza, se a è un numero, $a + b$ rappresenta ciò che si ottiene eseguendo b volte su a la operazione $+$, ossia il successivo di a, d'ordine b, vale a dire la somma di a e di b. Ancora, se a è un uomo, e con ap indichiamo « il padre di a, » con $ap2$, $ap3$,... si indicherà rispettivamente il nonno, il bisnonno, ecc. Si noti che la scrittura $a \alpha b$, ove si vogliano separare i tre segni con parentesi, si dovrà scrivere $a(\alpha b)$, e non $(a \alpha)b$, che non avrebbe significato.

Per tradurre in simboli la definizione ora espressa a parole di $a \alpha b$, comincieremo dal caso di $b = 1$, e porremo

1. « Nelle ipotesi enunciate, $a \alpha 1$ significa $a \alpha$. »

Poi ammesso che cosa significhi $a \alpha b$ per un certo valore del numero b, si definisce la stessa operazione quando al posto di b si legga il suo successivo:

2. « Nelle stesse ipotesi, $a \alpha (b +)$ significa ciò che si ottiene eseguendo su $a \alpha b$ ancora una volta l'operazione α. »

A completare queste definizioni occorre il teorema

3. « Nelle stesse ipotesi, essendo b un N, sarà $a \alpha b$ un individuo della classe s. »

« Infatti, per $b = 1$, a causa della def. 1, la cosa è vera. E se b è numero per cui $a \alpha b$ sia un s, a causa della def. 2, anche $a \alpha (b +)$ sarà un s. Quindi, per la legge d'induzione, la proposizione è vera, qualunque si sia b. »

Ne risultano come conseguenze:

4. « Essendo a un numero, $a + 1$ indica il successivo di a. Invero basta nella P1 al posto di s ed α leggere N e $+$, onde avere la prop. a dimostrarsi. »

Colla stessa sostituzione dalla 2 si ricava la 5, che si può anche scrivere sotto la forma 5', e dalla 3 la 6.

Un altro teorema sulle operazioni ripetute è il

7. « Conservando s, α, a il precedente significato, ed essendo b e c due numeri, allora l'eseguire su a l'operazione α, b volte, e sul risultato la stessa operazione c volte, equivale ad eseguire l'operazione α, $b + c$ volte. »

La dimostrazione, che si fa pure per induzione, è simile a quella della P3.

Facendo nella 7 la solita sostituzione si ha la P8, che esprime la proprietà associativa della somma.

La prop. 9, che ne esprime la proprietà commutativa, trovasi dimostrata sempre per induzione nel § 1, prop. 24 e 25 degli *Arith. pr.*, a cui rimando il lettore, non avendo da farci alcuna modificazione. Così si hanno le proprietà fondamentali dell'addizione.

Le proprietà 8 e 9 sono, in alcuni trattati d'Aritmetica (come in quello del Bertrand), date senza dimostrazione, come un principio; e credo che questo sia ben fatto in un insegnamento secondario. Le dimostrazioni contenute in altri trattati non sono soddisfacenti. Così per dimostrare che $a+b=b+a$, il ragionamento

« Infatti la serie di a unità alle quali siano state aggiunte b unità

$$\overset{1}{1}+\overset{2}{1}+\overset{3}{1}+\ldots+\overset{a}{1}+\overset{1}{1}+\overset{2}{1}+\ldots+\overset{b}{1}$$

guardata da destra a sinistra, non è altra cosa che la serie di b unità alle quali sono state aggiunte a unità, »

non è trasformabile in alcuna delle forme note di ragionamento; ed è forse più chiaro ammettere la proposizione a dimostrarsi che la validità di quel ragionamento.

Le dimostrazioni rigorose di queste proprietà, e che noi abbiamo riportate, devonsi a H. Grassmann [1]. Esse furono poi ripetute da Hankel [2], Peirce, Dedekind, ecc., il quale ultimo enunciò pure il principio di induzione matematica, di cui gli altri si servivano « nach einer bekannten Schlussweise », senza enunciarlo esplicitamente.

§ 4. — Maggiori e Minori.

$a, b, c, \ldots \, \varepsilon \, N \, . \supset .\therefore$

Definizioni.

1. $b > a \, . = . \, b \, \varepsilon \, a + N$
2. $a < b \, . = . \, b > a.$

(1) *Lehrbuch der Arithmetik*, Berlin 1861.
(2) *Vorles. ü. d. Complexen Zahlen.*

Teoremi.

3. $a + b > a$.
4. $a < b \,.\, b < c :\supset .\, a < c$.
5. $a < b \,.\supset .\, a + c < b + c$.
6. $a < b \,.\, c < d :\supset .\, a + c < b + d$.
7. $a = 1 \,.\cup .\, a > 1$.
8. $a = b \,.\cup .\, a > b \,.\cup .\, a < b$.
9. $a = b \,.\, a > b : = \Lambda$.
10. $a = b \,.\, a < b : = \Lambda$.
11. $a > b \,.\, a < b : = \Lambda$.

Osservazioni.

Indicando con a, b,... degli N, si dice (P1) che b è maggiore di a, se b è uno dei numeri che si ottengono aggiungendo ad a un numero (intero positivo). E, P2, che $a < b$, quando $b > a$. Le relazioni $>$ e $<$ soddisfano ai teoremi 3-11, la cui interpretazione è assai facile e di cui si tralascia per brevità la dimostrazione.

§ 5. — Dello zero e dell'inversione.

1. $s \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, \alpha \,\varepsilon\, s \backslash s \,.\, a \,\varepsilon\, s :\supset .\, a \alpha 0 = a$ [Def.]
2. $a \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset .\, a + 0 = a$ $\left[\begin{pmatrix} \mathrm{N}, & + \\ s, & \alpha \end{pmatrix} \mathrm{P1} = \mathrm{P2}\right]$

Definizione dell'inversione.

3. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, \alpha \,\varepsilon\, a \backslash b \,.\, y \,\varepsilon\, b :\supset .\, y \alpha - = \overline{x \,\varepsilon}\, (x \alpha = y)$

3′ » » » $:\supset .\, y \bar{\alpha} = y \alpha -$

Teoremi.

4. » » » $:\supset : x \,\varepsilon\, y \alpha - \,.=.\, x \alpha = y$ [P3 = P4]
5. $s \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, \alpha, \bar{\alpha} \,\varepsilon\, s \backslash s \,.\, x \,\varepsilon\, s :\supset .\, x \alpha \bar{\alpha} = x$
6. » » » $:\supset .\, x \bar{\alpha} \alpha = x$
7. » » » $.\supset .\, x \alpha - - = x \alpha$
8. » » » $.\, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} :\supset .\, x \alpha - b \,\varepsilon\, s$ $\left[\begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \alpha \end{pmatrix} \S\, 3\ \mathrm{P3} \,.\supset .\, \mathrm{P7}\right]$
9. » » » $:\supset .\, x(\alpha b -) = x(\alpha - b)$.

Osservazioni.

La scrittura $a\,\alpha\,b$, già definita nel § 3 quando b è un N, si definirà ora per $b=0$, e, in certi casi, per b negativo.

1. « Essendo s una classe, ed α un'operazione che trasforma gli s in s, ed a un s, allora porremo, per definizione, che $a\,\alpha\,0$ valga a. » La formola $a\,\alpha\,0$ si potrà leggere ciò che si ottiene eseguendo su a l'operazione α, nessuna volta.

2. « Leggendo nella precedente N e $+$ al posto di s e α, si ottiene che, essendo a un numero, $a+0$, cioè il successivo di a d'ordine 0, vale a. »

3. « Essendo a e b due classi, ed α una rappresentazione degli a nei b, ed y un individuo della classe b, con $y\,\alpha$ — intenderemo la classe degli individui x, il cui corrispondente $x\,\alpha$ vale y. »

3' « E, per comodità, scriveremo anche $y\,\bar{\alpha}$ invece di $y\,\alpha$ —. »

La prop. 3 contiene pertanto la definizione dell'inversione; la nuova funzione α —, ovvero $\bar{\alpha}$, dicesi l'*inversa* della funzione α, e si può leggere « α inversa. » Fra breve il segno d'inversione — si potrà leggere *meno*, e indicherà i numeri negativi, e la sottrazione. Il secondo modo, $\bar{\alpha}$, d'indicare l'inverso di α, si può considerare come derivato dal primo, scrivendo il segno d'inversione — sopra la α, invece che dopo. Realmente però la notazione $\bar{\alpha}$, per indicare la funzione inversa di α, è dovuta al DEDEKIND.

La scrittura $y\,\alpha$ — è composta di tre segni; volendola decomporre colle parentesi, si dovrà scrivere $y(\alpha\,—)$, cioè su y si deve eseguire l'operazione α —, e non in $(y\,\alpha)$ —, che non avrebbe significato. Come esempi di inversione, se xp indica « il padre di x, » yp — indicherà « i figli di y »; e poichè $x+$ indica il numero seguente x, ne risulta che $y+$ — indica il numero che precede y (Vedasi la def. § 6 P6).

La prop. 3, ove ai due membri della tesi si facciano precedere da $x\,\varepsilon$, diventa

4. « Nelle stesse ipotesi, affermare che x è un $y\,\alpha$ —, significa che $x\,\alpha$ vale y. »

Dato y nella classe b può avvenire che $y\,\alpha$ — non rappresenti alcun ente; ciò avviene se y non è il corrispondente di alcun individuo della classe a, cioè se y non appartiene alla classe $a\,\alpha$. Può avvenire che ve ne siano parecchi, formanti una classe, e può avvenire che ve ne sia uno solo. In quest'ultimo caso, se $x\,\alpha=y$, si dovrà scrivere $x=y\,\bar{\alpha}$, e non $x\,\varepsilon\,y\,\bar{\alpha}$, essendo x il solo corrispondente di y nella relazione $\bar{\alpha}$.

È importante il caso in cui ad ogni individuo x della classe a corrisponde un $y=x\,\alpha$ della b, e viceversa, ad ogni y della classe b corrisponde un solo $x=y\,\bar{\alpha}$ della a, ossia in cui $\alpha\,\varepsilon\,a\backslash b$ e $\bar{\alpha}\,\varepsilon\,b\backslash a$. In questo

caso la corrispondenza dicesi *univoca e reciproca*, ovvero, secondo il Dedekind, *simile*.

5. « Essendo s una classe, e α una trasformazione degli s in s, simile, cioè se anche $\bar{\alpha}$ fa corrispondere ad ogni s un s, ed x è un s, sarà $x \alpha \bar{\alpha} = x$, »

6. « e $x \bar{\alpha} \alpha = x$ »;

vale a dire, eseguire prima l'operazione diretta e poi l'inversa, ovvero prima l'inversa e poi la diretta, è come non fare alcuna operazione. La 6 è anche vera per le rappresentazioni non simili.

7. « La funzione inversa dell'inversa di α è la α. »

8. « Avendo s, α e x il solito significato, ed essendo b un numero, la scrittura $x\alpha - b$ rappresenta un s. Invero, basta nella prop. 3 del § 3, al posto di α leggere la funzione inversa di α. »

La scrittura $x\alpha - b$ rappresenta adunque ciò che si ottiene eseguendo su x l'operazione α, invertita, b volte. Volendosi decomporre il gruppo precedente di quattro lettere, si dovrà scrivere:

$$x\left[(\alpha -)b\right], \text{ ovvero } x : \alpha - . b.$$

L'insieme del segno d'inversione —, e del numero positivo b è ciò che si chiama *numero negativo*. Quindi il segno -5 ha il significato « invertire, e poi ripetere cinque volte. » Così, se xp indica « il padre di x, » la scrittura $xp - 2$ significa « il figlio del figlio di x »; e se x è un numero, $x + -5$, significa « ciò che si ottiene facendo l'operazione inversa di successivo di x, cinque volte » ossia « il numero precedente x di cinque posti. » Non avremo bisogno di introdurre alcun nuovo segno per indicare « numero negativo, » bastandoci la notaz. $-$N.

9. « Conservando le notazioni della prop. precedente, allora ripetere l'operazione α, b volte, e poi invertire l'operazione risultante, equivale a invertire la α, e poi ripetere b volte. »

Si ommette la dimostrazione, che si può dare per induzione.

§ 6. — Degli n (numeri interi).

Definizioni.

1. $\mathrm{n} = \mathrm{N} \cup 0 \cup - \mathrm{N}$
2. $0 + 1 = 1$
3. $- 1 + 1 = 0$
4. $a \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \supset . -(a + 1) + 1 = - a$

Teoremi.

5. $+ \,\varepsilon\, \mathrm{n} \backslash \mathrm{n}$
6. $a \,\varepsilon\, \mathrm{n} . \supset . a - = a + -$ [Def.]

7. $-\varepsilon\, \mathrm{n} \backslash \mathrm{n}$

8. $s\, \varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, \alpha, \bar{\alpha}\, \varepsilon\, s \backslash s \,.\, a\, \varepsilon\, s \,.\, b\, \varepsilon\, \mathrm{n} : \supset .\, a\, \alpha\, b\, \varepsilon\, s.$

9. $a, b\, \varepsilon\, \mathrm{n} \,.\supset.\, a+b,\ a-b\, \varepsilon\, \mathrm{n}.$

10. $s\, \varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, \alpha, \bar{\alpha}\, \varepsilon\, s \backslash s \,.\, a\, \varepsilon\, s \,.\, b, c\, \varepsilon\, \mathrm{n} : \supset .\, (a\, \alpha\, b)\, \alpha\, c = a\, \alpha\, (b+c).$

Spiegazioni.

1. « Indicheremo colla lettera n l'insieme degli N (numeri interi positivi), dello 0 (zero), e dei — N (numeri interi negativi). »

Si vogliono disporre per ordine questi numeri, ossia si vuol definire l'espressione $a+$ o $a+1$ (successivo di a), anche quando a è nullo o negativo. Perciò (P2), si fa l'unità successiva di zero, (P3), lo zero successivo di -1, e (P4), se a è un numero positivo, il successivo di $-(a+1)$ sia $-a$. Ne risulta (P5) che $+$ è il segno d'operazione che seguendo un n qualunque, riproduce un n. Converremo poi (P6) di scrivere $a-$ invece di $a+-$, cioè di precedente a. Ne risulta che (P7), il segno $-$, che è attualmente l'inverso del $+$, seguendo un n riproduce un n.

(P8) « Essendo s una classe, α una trasformazione univoca e reciproca degli s in loro stessi, a un s, e b un numero intero (positivo o nullo o negativo), $a\, \alpha\, b$ rappresenta un s. » Questa proposizione contiene in sè le § 3 P3, § 5 P1 e § 5 P7.

Ne risulta come conseguenza, supponendo che l'operazione α coincida successivamente colle operazioni $+$ e $-$, che (P9), « essendo a e b due n qualunque, anche $a+b$ e $a-b$ sono degli n, » ossia è definita la somma e la differenza di due n qualunque.

Qui sarebbe opportuno l'enunciare e dimostrare le proprietà dell'addizione e sottrazione degli n; ma noi lascieremo in disparte questa trattazione.

§ 7. — Prodotto e Potenze.

Definizione.

1. $a, b\, \varepsilon\, \mathrm{n} \,.\supset.\, a \times b = 0[(+a)b]$

1' » $.\, ab = a \times b$

Teoremi.

2. $a, b\, \varepsilon\, \mathrm{n} .\supset.\, a \times b\, \varepsilon\, \mathrm{n}$ $\quad \left[\begin{pmatrix} \mathrm{n} & +a & 0 \\ s & \alpha & a \end{pmatrix} \S 6\, \mathrm{P}8 \,.\supset.\, \mathrm{P}2 \right]$

3. $a, b, c\, \varepsilon\, \mathrm{n} .\supset.\, ab + ac = a(b+c)$ $\quad [\ \ »\ \ \S 6\, \mathrm{P}10 \,.\supset.\, \mathrm{P}3]$

4. $a, b\, \varepsilon\, \mathrm{n} .\supset.\, ab = ba.$

5. $s \varepsilon \mathrm{K} . \alpha \varepsilon s \backslash s . a \varepsilon s . b, c \varepsilon \mathrm{N} : \supset . a\left[(\alpha b)c\right] = a\left[\alpha(b \times c)\right]$

5′ » $. \alpha, \bar{\alpha} \varepsilon s \backslash s$ » $. b, c \varepsilon \mathrm{n} : \supset .$ » »

6. $a, b, c \varepsilon \mathrm{n} . \supset . (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Definizione.

7. $a \varepsilon \mathrm{n} . b \varepsilon \mathrm{N} : \supset . a^b = 1\left[(\times a)b\right]$

Teoremi.

8. $a \varepsilon \mathrm{n} . b \varepsilon \mathrm{N} : \supset . a^b \varepsilon \mathrm{n} .$ $\left[\begin{pmatrix} \mathrm{n} & \times a & 1 \\ s & \alpha & a \end{pmatrix} \S 3\, \mathrm{P}3 . \supset . \mathrm{P}8\right]$

9. $a \varepsilon \mathrm{n} . b, c \varepsilon \mathrm{N} . \supset . a^b a^c = a^{b+c}$ [» $\S 3\, \mathrm{P}7 . \supset . \mathrm{P}9$]

10. » $. \supset . (a^b)^c = a^{bc}$ [» $\S 7\, \mathrm{P}5 . \supset . \mathrm{P}10$]

11. $a, b \varepsilon \mathrm{n} . c \varepsilon \mathrm{N} : \supset . (ab)^c = a^c b^c .$

Osservazioni.

1. « Indicando a e b due n, per loro prodotto $a \times b$ intenderemo ciò che si ottiene eseguendo su 0 l'operazione $+a$, b volte. »

2. « Qualunque si siano a e b, la scrittura $a \times b$ rappresenta un n determinato, come si ricava dalla prop. 8 del § 6, ove si supponga che s indichi la classe degli n, l'operazione α sia $+a$, cioè aggiungere a, e all'a di quella proposizione si sostituisca 0. »

Si noti che la def. 1 è affatto generale, ed applicabile qualunque siano i segni di a e b. Quindi, per definizione, $a \times 3 = 0 + a + a + a$, cioè $a + a + a$, qualunque si sia a, positivo o negativo; e per avere $a \times (-3)$ si dovrà eseguire su 0 l'operazione $+a$, invertita, tre volte, ossia si dovrà eseguire tre volte l'operazione $-a$, e si avrà $0 - a - a - a$. Ne deriva immediatamente la regola dei segni.

La definizione, assai comune, « moltiplicare un numero a per un numero b significa eseguire sopra a le operazioni che si sono eseguite sull'unità per avere b, » non è soddisfacente, poichè dire che un'operazione (o complesso di operazioni, funzione) eseguita sull'unità dà per risultato b, non determina la natura di questa operazione, e quindi non si può sapere il risultato di essa eseguita su a. In altre parole, se f è un segno di funzione, dal sapere che $f(1) = b$, nulla si può dedurre sul valore di $f(a)$, essendo a diverso dall'unità.

Noi non svilupperemo quì le proprietà della moltiplicazione, ma accenneremo quelle sole che sono conseguenza immediata di proposizioni precedenti.

Facendo la solita sostituzione nella P10 del § 6 si ha la P3, esprimente la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

La P4 esprime la proprietà commutativa della moltiplicazione. La dimostrazione data dal DIRICHLET (*Teoria dei numeri*, pag. 1) non si può ridurre a ragionamento di logica pura; essa, secondo l'HANKEL, è dedotta « durch eine im Grunde geometrische Construction. » Si trova riprodotta nell'*Aritmetica* del BALTZER. La dimostrazione contenuta nell'*Aritmetica* del BERTRAND, a rigore, prova puramente che $3 \times 5 = 5 \times 3$; ma si intuisce come essa si possa generalizzare; e cercando di enunciarla in generale e ridurla a forma di sillogismi, si ricade anche qui in quella data dal GRASSMANN, riprodotta in seguito da tanti autori, ed espressa in formole di logica negli *Arith. principia*, § 4, prop. 5 e 6.

5. « Sia s una classe, α una trasformazione degli s in s, a un individuo della classe s, b e c dei numeri positivi. Allora ha significato l'operazione αb, cioè l'operazione α ripetuta b volte; ed ha pure significato la $(\alpha b)c$, cioè l'operazione αb ripetuta c volte; e questa operazione vale l'operazione α ripetuta $b \times c$ volte. »

La 5′ estende la prop. precedente, per b e c negativi, supposta l'operazione α simile.

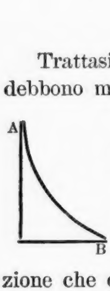
Dalla prop. 5 si deduce la proprietà associativa della moltiplicazione, espressa dalla 6.

7. « Essendo a un n e b un N, con a^b intenderemo ciò che si ottiene ripetendo su 1 l'operazione $\times a$, b volte. »

Risultano subito, da prop. precedenti sulle operazioni, le prop. 8, 9, 10. La prop. 11 si può dimostrare per induzione.

Questione.

Trattasi di costrurre una funicolare fra i due punti A e B; su essa debbono muoversi due carrozze (punti materiali) di egual peso, l'una ascendente, e l'altra discendente, unite fra loro da una fune pesante che si accavalca su di una carrucola posta alla sommità A della funicolare.



Si vuole che in ogni istante il sistema formato dalle due carrozze e dai due rami della fune sia in equilibrio. Determinare il tracciato della funicolare, aggiungendo la condizione che esso sia il più breve possibile, ovvero altre condizioni sufficienti a determinarlo.

Ing. F. S.

Un teorema di logica matematica.

Estratto di lettera dell'Ing. G. VAILATI *al Direttore* (1).

..... E per finire ecco un ultimo teorema che *forse* non è mai stato rimarcato e che non manca d'una certa eleganza. Se si ha contemporaneamente

$$ab \supset cd \quad \text{e} \quad b+c \supset a+d$$

si ha

$$b \supset d.$$

Infatti:

$$b \supset b(b+c) \supset b(a+d) \supset ba+bd \supset cd+bd \supset d(b+c) \supset d(a+d) \supset d.$$

Come caso particolare di questo si ha che: se $ab = \bar{a}\bar{b}$, si ha $b = \bar{a}$. Questo si può pure enunciare nel seguente modo (usando le locuzioni ordinarie): *Se il prodotto logico di due fattori è eguale alla negazione della loro somma, l'uno dei due fattori è eguale alla negazione dell'altro.*

RECENSIONI

Dott. Giulio PETERSEN: *Teoria delle equazioni algebriche.*

La teoria delle equazioni del Dott. Giulio PETERSEN, Prof. nell'Università di Copenaghen, è un ottimo libro recentemente tradotto in italiano dai Prof. Girolamo ROZZOLINO e Giuseppe SFORZA (2). In sole 164 pagine in-12° tratta le parti principali della teoria delle equazioni fino alle ultime scoperte. Per dar luogo a tanta materia in sì breve spazio dovette qualche volta lasciar da parte minute disquisizioni, le quali sarebbero necessarie per togliere ogni possibile dubbio, della qual cosa il lettore viene indirettamente avvisato p. es. con la nota che termina la pagina 114: le più difficili proposizioni, che in parecchi libri che trattano delle equazioni neppure figurano, vengono per ciò appunto presentate in modo che nettamente si imprimono anche nelle menti non ancora abituate alle più delicate discussioni. Il libro, che principia con una concisa trattazione delle espressioni complesse, contiene le principali proposizioni relative alle radici delle equazioni ed alle loro funzioni simmetriche, le teorie dell'eliminazione e della trasformazione, le diverse maniere di risoluzione delle equazioni cubica e

---

(1) L'A., seguendo SCHRÖDER, scrive $a+b$ invece di $a \cup b$, e $\bar{a}$ invece di $-a$. *N. d. R.*

(2) Libreria Bened. Pellerano, Napoli 1891.

biquadratica, la risoluzione, trigonometrica ed algebrica, dell'equazione binomia ed una dimostrazione dell'impossibilità di risolvere algebricamente l'equazione di 5° grado: dedica un capitolo alla risoluzione dei polinomii razionali in fattori razionali, uno alle equazioni Abeliane con una radice esprimibile razionalmente per mezzo d'un'altra, uno alle equazioni risolubili per radicali quadratici e terminano questo capitolo, ed il libro, alcune considerazioni geometriche, particolarmente sulle curve per le quali i punti d'intersezione con una retta arbitraria, o le tangenti per un punto arbitrario, sono ottenibili mediante riga e compasso.

Prima di finire voglio dire alcune parole pel teorema di D'Alembert. Di questo teorema, fondamentale alla teoria delle equazioni, l'autore porta due dimostrazioni: in una ammette che ogni curva piano-algebrica divida il piano in regioni positive e negative e che si passi da una regione ad un'altra attraversando la curva un numero dispari, o pari, di volte secondo che le regioni sono di segno diverso, od eguale; ammette ancora che se $\varphi(z)=0$ è un'equazione e, ponendo $z=x+iy$ e separando le parti reale ed immaginaria, si ottiene $\varphi(z)=\mathrm{A}+i\mathrm{B}$, le $\mathrm{A}=0$ $\mathrm{B}=0$ rappresentino due curve reali; infine dal modo di comportarsi delle curve

$$\mathrm{A}=r^n . \cos n\theta+ \ldots =0 \qquad \mathrm{B}=r^n . \operatorname{sen} n\theta+ \ldots =0$$

per r infinito conclude senz'altro sulla natura delle stesse curve per r finito. Sarebbe conveniente che tutto ciò fosse dimostrato: quanto può occorrere per questo fine si trova nella prima dimostrazione di Gauss dello stesso teorema (1). Nell'altra, di Argand, come dichiara l'autore, dimostra che, se z è un dato valore reale o complesso, si può dare z' in modo che sia mod. $f(z') <$ mod. $f(z)$; osserva che non può crescere indefinitamente z col decrescere del modulo di $f(z)$ e conclude dover esistere almeno un valore di z per cui sia $f(z)=0$: ma per legittimare questa conclusione si deve provare l'esistenza d'un minimo di $f(z)$, come Gauss ha osservato a proposito della dimostrazione dello stesso D'Alembert (2): ciò si può facilmente dimostrare nel seguente modo: il modulo di $f(z)$ è funzione sempre positiva nel campo dei numeri complessi epperò vi ammette un limite inferiore il quale per un noto teorema di Weierstrass, generalizzato (3), è anche un minimo della funzione mod. $f(z)$ perchè la medesima è funzione continua della variabile complessa $z=x+iy$, ossia delle variabili reali x ed y.

Finalmente credo opportuno ricordare che il teorema di irresolvibilità per le equazioni di grado superiore al quarto è dovuto a Paolo Ruffini. Di nessun altro teorema è meglio accertato lo scopritore perchè Ruffini, al

---

(1) *Die vier Gauss'schen Beweise für die zerlegung ganzer algebraischer functionen in reelle factoren ersten oder zweiten grades.* Wilhelm Engelmann, Leipzig 1890.

(2) *Die vier Gauss'schen...*; pag. 12, 4.

(3) *Calc. diff. e principii di calc. integrale* del Dott. G. Peano. — Libreria Bocca, Torino 1884, pag. 131.

solo scopo di far conoscere il medesimo, pubblicò due volumi l'anno 1799 (1), tre anni prima della nascita di Abel, mentre questi che fu secondo ad occuparsene, come egli stesso afferma (2), se ne occupò pubblicamente solo nel 1826 (3), quattro anni dopo la morte di Ruffini. La dimostrazione di Ruffini non è senza difetti, come egli stesso ha riconosciuto ritornando sulla medesima, nella Società italiana delle scienze, con una Memoria di 64 pagine dove dice nell'esordio: *Non ogni volta che vien dato di dimostrare per la prima fiata un teorema di difficile scoprimento, i discorsi che per ciò si eseguiscono, sono i più semplici, e i più esatti.* Tuttavia Cauchy la trovò abbastanza buona per riferirne favorevolmente all'*Académie des sciences.*

F. GIUDICE.

Palermo, marzo 1891.

Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi. — Memoria del Prof. RICCARDO DE PAOLIS (estratta dal tomo VII, serie III, delle *Memorie della Società Italiana delle Scienze detta dei XL*).

Se non fosse ardimento soverchio da parte nostra l'additare quale sia il carattere che più spiccatamente distingue le ricerche matematiche che si vanno svolgendo a' dì nostri da quelle che affaticarono gli scienziati appartenenti ai decenni non ultimi del secolo nostro, noi inclineremmo a segnalare come più essenziale divario fra le une e le altre questo, che, mentre in addietro analisti e geometri percorrevano vie completamente diverse, e ogni matematico si studiava di far progredire la disciplina a cui erasi consacrato senza mai domandarsi se e in qual misura le scoperte altrui erano capaci di esercitare qualche influenza benefica sulle proprie investigazioni; ora, seguendo le norme di un ben inteso ecletismo, sempre più esiguo si fa il numero di quelli che si rinchiudono fra le quattro mura limitanti il campo alla cui coltivazione dedicarono la loro vita. Non già che si apprezzi ora meno che in passato la rigorosa unità di metodo, chè anzi si può dire che la determinazione e la conseguente espulsione di tutto che tolga ad un metodo il suo carattere di purezza vengono oggi condotte con l'accuratezza di un microscopista e il rigore di un giudice illuminato quanto inflessibile. Ma lo scienziato che si occupa di un argomento qualsia, non trascura di compiere di quando in quando dei viaggi d'istruzione nelle regioni circostanti a fine di persuadersi *de visu* che ivi non cresca qualche

---

(1) *Teoria generale delle equazioni* in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni di grado superiore al quarto. Bologna.

(2) ABEL, *Oeuvres*. Christiania MDCCCLXXXI, t. II, pag. 218.

(3) ID., *id.*, t. I, pag. 66.

pianta la quale, dopo un conveniente processo di acclimatazione, possa dare anche nel suo campo dei frutti nutrienti e succosi (1).

Quale eccezionale importanza possieda questa mutazione d'indirizzo del movimento matematico — alla quale contribuirono, forse più d'ogni altro, Clebsch e il suo degno discepolo e successore Klein (2) — non è chi non vegga. Per essere dessa il portato di una maggiore larghezza di vedute e di una più grande agilità di pensiero nei matematici, deve senza dubbio designarsi come progresso; mentre, in quanto porge allo studioso una collezione assai più ricca di strumenti d'indagine, può essere ragionevolmente dichiarata come causa efficiente di considerevoli avanzamenti cui son chiamate a compiere le scienze esatte (3).

Queste osservazioni, da noi fatte e ripetute in casi numerosissimi, si riofferсero spontaneamente alla nostra mente studiando la *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi* che il Prof. R. De Paolis ha recentemente pubblicata; lavoro a cui qualunque geometra, abbia esso pure delle opinioni la cui ortodossia tocchi l'intolleranza, può concedere la cittadinanza nel regno che deve ad Euclide il suo assetto definitivo (4), ma che tuttavia contiene come ingredienti fondamentali una moltitudine di concetti la cui prima formulazione si deve ricercare nella biblioteca di un analista. L'egr. Professore dell'Università di Pisa, piuttosto che scoperti e occupati nuovi e lontani territori, ha applicati a terre non ancora dissodate insoliti metodi di coltura e messo così in luce meridiana tutta la fecondità di essi; metodi i quali, con ogni pro-

(1) Io inclino a riavvicinare questo fatto alla tendenza odierna di ricercare in ogni ragionamento matematico quanto vi ha di essenziale, spogliandolo da tutte le accidentalità che presenta una sua applicazione ad un particolare soggetto; tendenza a cui devono la propria esistenza la teoria generale delle operazioni e la logica matematica, e della quale non saprei citare risultato più importante dell'omai classico *Saggio d'interpretazione della geometria non-euclidea* del Prof. Beltrami.

(2) Per quanto concerne la matematica pura: chè, se si parla del suo uso nell'interpretazione dei fenomeni naturali nessuno può vantarsi d'avere combattuto in favore dell'ecletismo nel metodo più di quello che abbia fatto il Lamé (v. oltre alla prefazione delle sue *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, l'*Eloge de Gabriel Lamé* inserito nel volume intitolato *Eloges académiques par J. Bertrand*, Paris 1890).

(3) Dopo che le precedenti linee erano scritte, io trovai una conferma di quanto ivi è esposto nell'opinione di Klein « dass man als Aufgabe der moderne Mathematik betrachten müsse, die uns überkommenen, getrennt nebeneinander stehenden mathematischen Disciplinen in lebendige Wechselwirkung zu setzten. » Klein-Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, I Bd., Leipzig 1890, p. 242).

(4) Va fatta eccezione pel teorema N. 150 e, se non c'inganniamo, per questo soltanto.

babilità, gli furono suggeriti da un'accurata analisi istologica di teorie escogitate da coloro che più efficacemente collaborarono all'erezione dell'analisi moderna; e anche ove egli si è servito di procedimenti già in uso, lo ha fatto da maestro non senza apportarvi importanti cambiamenti: « Quand « on joue à la paume, c'est une même balle dont on joue l'un et l'autre, « mais l'un la place mieux » (PASCAL). Dotato di ingegno essenzialmente organizzatore, egli ha saputo, con singolare maestria, estrarre da scritture diverse quei concetti, quei metodi, quelle proposizioni che potevano convenirgli, aggiungendo del suo quanto fosse capace di riempire le lacune che presentava il loro insieme e fondere il tutto in una ben architettata e completa teoria.

Quanto lontano si sia spinto il DE PAOLIS nelle escursioni che egli compì col proposito di procacciarsi i materiali per fabbricare la sua *Teoria*, è rivelato ad esempio dall'avere egli avuta l'idea di trar profitto di investigazioni compiute da WEIERSTRASS, HEINE e DINI nella teoria delle funzioni di variabili reali, e di porre allo scoperto il substrato geometrico posseduto da teoremi da essi dimostrati; inoltre dall'idea di introdurre metodicamente nello studio delle corrispondenze (algebriche) le superficie di RIEMANN e di fare largo uso dei ben noti risultati concernenti la teoria dei gruppi di punti ottenuti da G. CANTOR; infine dall'idea di chiamare a far parte integrante della geometria l'*Analysis situs* (1) e le ricerche attinenti alla

---

(1) « Beider Untersuchung der Functionen, welche aus der Integration vollständiger Differentiale entstehen, sind einige der analysis situs angehörige Sätze fast unentberlich. Mit diesem von Leibnitz, wenn auch vielleicht nicht ganz in derselben Bedeutung, gebrauchten Namen darf wohl ein Theil der Lehre von der stetigen Grössen bezeichnet werden, welche die Grössen nicht als unabhängig von der Lage existirend und durch einander messbar betrachtet, sondern von den Massverhältnissen ganz absehend, nur ihre Orts- und Gebietverhältnissen der Untersuchung unterwirft. »

Tali sono le parole con cui RIEMANN nel § 2 della sua celebre *Theorie der Abel'schen Functionen* (1857) presentò agli scienziati l'*analysis situs*, di cui, del resto, aveva già fatto uso prima (1851) nella sua dissertazione di laurea. Un'altra definizione di questa — ma assai meno generale e più concreta — è implicitamente compresa nelle prime frasi della *Theorie der elementaren Verwandschaften* (1863) in cui MÖBIUS ne iniziò lo studio geometrico considerandola per primo come una disciplina a sè; è bene averle presenti; sono queste:

« Zwei geometrische Figuren sollen einander *elementar verwandt* heissen, wenn jedem nach allen Dimensionen unendlich kleinen Element der einen Figur ein dergleichen Element in der anderen dergestalt entspricht, dass von je zwei an einander grenzenden Element der einen Figur die zwei ihnen Entsprechenden Elemente der anderen ebenfalls zusammenstossen; oder, was dasselbe ausdruckt: wenn je einem Punkt der einen Figur ein Punct der anderen also entspricht, dass von je zwei einander unendlich nahen

connessione della superficie dopo averle purgate da quanto racchiudevano di non prettamente sintetico.

Ma è omai tempo che chiudiamo questi apprezzamenti generali e ci volgiamo ad analizzare parte per parte l'opera del De Paolis, non solo per rilevare i punti di contatto fra essa e i lavori anteriori — cosa non molto agevole in causa della grande sobrietà nelle citazioni adottata dall'A. — ma anche per contribuire, nella misura consentita dalle nostre forze, alla diffusione di ciò che è bene si trovi nel dominio del pubblico matematico.

I. Nell'intento di dare alle sue investigazioni una base di grande generalità, l'autore comincia la sua Memoria con un'introduzione in cui vengono definite le *varietà*, come l'insieme dei modi di determinazione che può ricevere un concetto generale, e i *gruppi* che si possono formare con i suoi *elementi*. Gli elementi di un gruppo si distinguono fra di loro per la *molteplicità* da essi posseduta, mentre i gruppi vengono classificati in base al loro *grado* che è il numero (il quale può anche essere infinito) di elementi che vi entrano. Hanno speciale importanza i gruppi aventi per elementi certi gruppi di una determinata varietà: essi portano il nome di *aggruppamenti*. Dati più gruppi, di frequente fa mestieri considerare il *gruppo unione* di tutti o il *gruppo comune* a tutti: da quest'ultima nozione nasce quella di *gruppi fra loro concatenati* o di *gruppi concatenati con un medesimo gruppo*.

II. Applicando le definizioni precedenti allo spazio, quale si concepisce ordinariamente, l'A. fa notare come esso sia una varietà di grado infinito i cui elementi sono i solidi, le superficie, le linee o i punti, i cui gruppi sono le *figure geometriche*. Quindi riassume le definizioni che si sogliono porre di consueto a base della geometria generalizzandone alcune: (« Il concetto di solido, di superficie, di linea, si può estendere chiamando solido anche un gruppo divisibile in parti ciascuna delle quali sia un solido; chiamando superficie anche un gruppo tale che nessuna delle sue parti sia un solido, e che si possa dividere in parti ciascuna delle quali sia una superficie; chiamando linea anche un gruppo tale che nessuna delle sue parti sia un solido o una superficie, e che si possa dividere in parti ciascuna delle quali sia una linea ») e mostrando la dipendenza di ognuna dai concetti generali. Si arresta sulla generazione di figure gemetriche mediante movimenti; sulla nozione di gruppi connessi, introducendo il postulato « ogni linea, superficie o solido si può sempre dividere in parti ciascuna delle quali sia una linea connessa, una superficie connessa o un solido connesso »; sulla divisione di un gruppo connesso in parti e sulla costru-

---

Puncten der einen auch die ihnen entsprechenden der anderen einander unendlich nahe sind. »

Sembra che il Möbius, nell'occuparsi di questo argomento, abbia seguito il corso delle proprie ricerche sui poliedri, senz'essere in alcun modo influenzato dalle idee che molto prima aveva emesse il suo collega di Gottinga e di cui testè venne fatto cenno.

zione di una figura mediante altre fra loro concatenate; da ultimo su i *nodi* delle linee e le *linee nodali* delle superficie, distinguendo le *superficie intrecciate* (dotate cioè di linee nodali) da quelle *sciolte* (che cioè ne son prive). Si avverta, coll'A., che quantunque molte di queste considerazioni presuppongano il postulato di Euclide, pure molti dei risultati della Memoria in esame, varrebbero in qualunque spazio di curvatura costante anche non nulla.

III. Nel terzo capitolo — il cui scopo è di formulare con precisione delle verità ovvie — entra in campo il concetto di *distanza*, concetto non definito esplicitamente, ma il cui uso in Geometria è reso possibile (Grassmann) dalle definizioni di coppie di punti che sono più, egualmente o meno distanti dei punti di un'altra coppia. Ne scaturiscono subito le nozioni di *gruppo indefinitamente esteso* o *infinito* (quali lo spazio, il piano, la retta) e di *gruppo avente una estensione finita* o *finito* (come una sfera o un circolo). Si dimostra agevolmente che nasce un gruppo finito sia un numero finito di gruppi finiti, sia un numero finito di gruppi supposto che uno di essi sia concatenato con tutti gli altri e che *fra i gruppi dati non se ne possa trovare uno tanto grande quanto si vuole* (1); così, non è difficile persuadersi della possibilità di circoscrivere a un gruppo finito qualunque una sfera o un cubo, a un gruppo finito piano un circolo, a un gruppo rettilineo un segmento di retta. Stabilite poi le nozioni di punti o gruppi *tanto vicini quanto si vuole* si hanno dati sufficienti per mettere in chiaro che a fine di potere asserire che un poligono o un poliedro variabili si possono rendere tanto piccoli quanto si vuole, basta sapere che ciò è possibile per il relativo perimetro; inoltre che se quanti si vogliano gruppi variabili tutti concatenati con uno di essi tendono *equabilmente* (2) a zero, oppure quanti si vogliano gruppi variabili tutti concatenati fra loro possono rendersi ciascuno tanto piccolo quanto si vuole, lo stesso accadrà del loro gruppo unione; finalmente che due punti i quali si possono rendere tanto vicini quanto si vuole ad un terzo si possono anche rendere tanto vicini quanto si vuole fra loro e che lo stesso accade quando il primo si può rendere tanto vicino quanto si vuole al terzo e questo al secondo.

IV. Le proposizioni contenute nel *quarto* capitolo concernono la divisione di un gruppo in parti arbitrariamente piccole. Fra esse è da ritenersi per fondamentale quello che afferma la possibilità di dividere un segmento rettilineo in segmenti fra loro eguali e ciascuno piccolo quanto si vuole. Per dimostrarla fa mestieri ammettere quella proposizione che il Dedekind ha chiamato *postulato della continuità della retta* (3) e che l'A.

---

(1) Questa condizione, che il testo tace, fu più tardi avvertita come necessaria dall'A.

(2) Aggiunta del Prof. Peano.

(3) « Zerfallen alle Puncten der Geraden in zwei Classen von der Art, dass jeder Punct der ersten Classe links von jeden Punct der zweiten Classe liegt, so existirt ein und nur ein Punct, welcher diese Eintheilung

ha cura di enunciare in principio del capitolo in questione. Dalla proposizione fondamentale emerge la possibilità di decomporre un quadrato, un cubo epperò anche qualsivoglia altro gruppo finito in un numero finito di parti ciascuna arbitrariamente piccola, e, se il gruppo è una linea o una superficie o un solido, di eseguire la decomposizione per modo che un punto non esterno ad esso sia contenuto in una sola di queste parti. Queste due *proprietà di gruppi finiti* si mutano in due *proprietà di gruppi infiniti* sostituendo negli enunciati alla parola *finito* la parola *infinito*. Aggiungiamo che la dimostrazione del teorema N. 45 non sembra conclusiva al Prof. PEANO, il quale perciò ritiene dubbio che « se un punto è limite di un gruppo infinito, si possa sempre trovare un gruppo in esso contenuto, che abbia per limite quel punto. »

V. Un punto vien chiamato *punto limite di un aggruppamento* quando nell'aggruppamento esistono infiniti punti vicini quanto si vuole a quel punto; se poi vi è un gruppo tutto composto di punti lineari di un aggruppamento, esso si dirà *gruppo limite* dell'aggruppamento. Queste definizioni hanno per conseguenze immediate alcune ovvie relazioni fra un punto che sia limite di un aggruppamento e le parti di questo aggruppamento. Per non dilungarci troppo, sorvoleremo su di esse, e noteremo invece il teorema « ogni punto di un segmento è limite del gruppo di punti che lo dividono in parti eguali », nonchè la proprietà di molte notissime figure geometriche (quali la retta, una linea poligonale, una superficie poliedrica, il circolo, la sfera, ecc.), di contenere ciascuna tutti i proprii punti limite.

Dalle cose testè accennate si è condotti alla definizione di *gruppi convergenti* (1) e allo studio delle loro proprietà, inoltre alle proposizioni seguenti che, sotto altra forma, furono dimostrate per la prima volta da WEIERSTRASS (2): « Un gruppo finito composto di infiniti punti distinti, possiede almeno un punto limite ». « Ad una data retta o ad un dato piano appartiene almeno un punto limite di un dato gruppo finito se questo contiene punti tanto vicini quanto si vuole alle rette o al piano. »

VI. Dalla nozione di punto limite di un gruppo scaturisce quella di *gruppo derivato* di un gruppo composto di infiniti elementi, perchè, seguendo Giorgio CANTOR, sotto questo nome si comprende la totalità dei

---

aller Puncten in zwei Classen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt. » DEDEKIND, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig 1872, p. 18.

(1) « Siano $G'(M_1'M_2'M_3'.....)$, $G''(M_1''M_2''M_3''.....)$ due gruppi di punti di un segmento AB. Supponiamo che G', G'' non abbiano punti comuni e che tutti i punti di M'' stiano sopra AB dallo stesso lato di B rispetto a tutti i punti M', e quindi tutti i punti M' stiano sopra AB dallo stesso lato di A rispetto a tutti i punti M''. I gruppi G', G'' sono due *gruppi convergenti* di AB se il segmento $M'M''$ si può rendere tanto piccolo quanto si vuole. »

(2) Nelle sue lezioni orali.

punti limite di questo gruppo. Se il gruppo (*primo*) derivato contiene infiniti elementi, di esso pure si potrà considerare il gruppo derivato il quale si dirà *secondo gruppo derivato* del dato; e così via. Ogni gruppo derivato è contenuto nei gruppi derivati precedenti; mentre invece il gruppo dato o può essere contenuto nel suo primo derivato (e chiamasi *condensato in sè stesso*), o può contenere nessun punto del suo gruppo primo derivato (nel qual caso è *isolato*), o può contenere tutti i punti del suo gruppo primo derivato (ed è in tale ipotesi *chiuso*). Se poi il gruppo è ad un tempo condensato in sè stesso e chiuso, esso dicesi *perfetto*. L'ordinaria geometria offre numerosi esempi di gruppi di queste varie specie, esempi i quali attestano l'opportunità dell'introduzione metodica nella scienza dell'estensione di queste idee che, dietro proposta del CANTOR (1), erano già state accolte nella scienza del numero. È eziandio opportuna la nozione di *gruppo ben concatenato*, il quale è caratterizzato dalla seguente proprietà: preso un determinato punto A del gruppo, un suo punto qualunque B e un segmento A'B' piccolo quanto si voglia, esiste sempre un numero finito di punti $M_1 M_2 \ldots M_n$ del gruppo tali che ciascuno dei segmenti $AM_1, M_1M_2 \ldots M_nB$ sia minore di A'B'. Se un gruppo, oltre ad essere ben concatenato è anche chiuso, esso dicesi *continuo:* di tale natura è lo spazio e sono le più semplici figure piane e solide studiate negli elementi della Geometria.

VII. Dato un aggruppamento finito di second'ordine contenuto in una retta, nel piano o nello spazio, si dice che le coppie di punti che ne sono elementi sono *separabili risp. sulla retta, nel piano* o *nello spazio*, se è possibile trovare un numero finito di parti della retta, del piano o dello spazio, ciascuna finita e connessa, le quali insieme contengano tutti i punti dell'aggruppamento, mentre nessuna contenga un gruppo che sia elemento di questo. Invece due gruppi finiti e contenuti in una stessa retta, in uno stesso piano o nello spazio si dicono *separabili* quando nessun punto è limite di entrambi, nessun punto dell'uno è limite dell'altro, e nessun punto appartiene ad entrambi. La ricerca delle condizioni di separabilità di un aggruppamento di second'ordine o di due gruppi finiti, e alcune applicazioni dei risultati ottenuti, compongono pressochè tutto il capitolo *settimo* dell'opera in esame.

VIII. Molti concetti e teoremi esposti e dimostrati per le rette, si possono estendere alle linee connesse, finite, sciolte o terminate da due punti, e divisibili in due parti perfette da un suo qualunque punto esterno, linee che l'A. chiama *elementari*. $n - 1$ punti scelti ad arbitrio in una linea elementare la spezzano in n linee elementari, e, viceversa, è elementare qualunque linea connessa, finita, sciolta e divisibile in un numero finito di parti elementari. Le nozioni di « punto compreso fra due altri », di « senso »,

---

(1) Ai cui lavori — inserti nei *Mathematische Annalen* e negli *Acta Mathematica* — è d'uopo ricorrere per trovare l'origine della massima parte dei materiali con cui fu costruito il *sesto* capitolo della Memoria che stiamo analizzando.

di « sensi opposti », di « intorno di un punto » si trasportano senza stento dai segmenti rettilinei alle linee elementari; del pari la proposizione « una linea elementare si può dividere in un numero finito di parti elementari, ciascuna tanto piccola quanto si vuole » ha la sua analoga sulla retta; di più il concetto di *gruppi convergenti* di una retta e il postulato della continuità della retta, hanno i loro corrispondenti in qualsia linea elementare; e la proposizione « se una variabile assume valori minori di una quantità fissa e maggiori di un'altra, essa avrà un limite superiore e un limite inferiore » trova una rappresentazione su una linea elementare qualunque come sulla retta.

Analoga alla linea elementare è la *linea chiusa sciolta* che, fra le linee connesse finite e sciolte, si distingue per la proprietà di essere divisa da due qualunque suoi punti in due parti ciascuna perfetta e connessa. Tanto le linee elementari quanto le linee chiuse sciolte possono esistere in una qualunque superficie: imitando la classificazione dei *Querschnitte* e dei *Rückkehrschnitte* proposta da C. Neumann (1), l'A. divide la totalità di queste linee in cinque categorie, l'ultima delle quali abbraccia linee chiuse.

IX. Come analoga nello spazio della superficie elementare si può considerare una superficie connessa finita e sciolta terminata da una linea chiusa sciolta, quando venga divisa in due parti ciascuna connessa e perfetta da una qualunque linea elementare tracciata su di essa e avente gli estremi del suo contorno; per tale analogia una superficie di questa natura viene chiamata *superficie elementare* (2). Una superficie elementare è divisa in due parti elementari da una linea elementare tracciata ad arbitrio in essa ed avente gli estremi sul suo contorno; invece è divisa da qualunque linea chiusa sciolta in essa contenuta in due parti connesse e perfette, di cui una soltanto è elementare: togliendo questa dalla superficie data resta una *superficie elementare con un buco;* similmente si possono ottenere delle *superficie elementari con parecchi buchi.* A una superficie elementare si possono agevolmente estendere la nozione di punti o linee situati da uno stesso lato di una linea, nonchè quella di intorno di un punto, ecc., ecc.

Una superficie elementare si può sempre dividere in un numero finito di parti connesse ciascuna tanto piccola quanto si voglia; in molti casi queste parti risultano elementari: l'A. introduce il *postulato* che esse lo siano sempre; egli può allora estendere alle superficie elementari molti teoremi dianzi stabiliti. Rimandando al lavoro originale il lettore desideroso di conoscerli, noi osserveremo (e la portata di questa osservazione esten-

---

(1) *Vorlesungen über die Riemann'sche Theorie der Abel'schen Integrale*, II Aufl., 1884, p. 161-2.

(2) La definizione data da Neumann (op. cit., p. 146) per una superficie elementare (« Jede ebene einblättrige Fläche, die nur eine Randcurve besitzt, soll eine Elementarfläche oder ein elementares Flächenstück heissen ») è apparentemente più semplice di quella del De Paolis, ma non è completa ed esatta quanto quest'ultima.

deremo a tutte le circostanze analoghe) come la necessità di introdurre *postulati* o *limitazioni* concernenti le superficie da studiarsi fu riconosciuta, anche in addietro, da coloro i quali vollero stabilire su una base solida considerazioni affini a quelle svolte dal nostro A. (1).

X. Si può costituire una linea o una superficie concatenando risp. più linee o superficie elementari; l'A. *ammette* che qualunque linea o superficie si possa immaginare costituita in questo modo epperò sia divisibile in un numero finito o infinito di parti elementari. Basandosi su quest'ipotesi, egli studia come la nozione di intorno di un punto si possa trasportare su una linea o superficie qualsivoglia, giungendo alla conclusione che di ogni punto di una linea o superficie si possono in generale considerare parecchi *gruppi di intorni:* introduce poi qui la nuova restrizione di considerare unicamente linee o superficie le quali, oltre essere continue dappertutto, non contengono punti nei quali esistano infiniti gruppi di intorni.

XI. Allorchè si considera un gruppo di infiniti punti situati su una linea o su una superficie, si possono ripetere con lievi modificazioni parecchie considerazioni dianzi svolte e giungere ai concetti di punto limite di un gruppo *su* la linea o la superficie; di gruppo condensato o chiuso o perfetto o continuo *su* la linea o la superficie; e di aggruppamenti separabili *su* la linea o la superficie: concetti i quali danno luogo a proposizioni affini ad altre precedenti. Quello che è indispensabile di tenere sempre presente è che, vuoi nelle definizioni, vuoi nei teoremi, in generale non è lecito sopprimere le parole *su la linea o la superficie* senz'affermare cose contrarie al vero.

XII. Si chiama *orientata* una linea o una superficie costituita da un numero finito o infinito di parti elementari due a due connesse nei loro estremi se si tratta di una linea, in tutti i punti di un numero finito o infinito dei loro contorni se si tratta di superficie; ogni linea costituente il contorno di una superficie orientata si dice *orlo* di essa. Una linea o superficie orientata può avere dei punti multipli, ma, grazie a convenzioni precedenti, il loro ordine di molteplicità è sempre finito; essa può sempre e in infiniti modi immaginarsi divisa in parti elementari. Su una superficie orientata sia segnata una linea orientata: l'orientazione della linea *dipende* da quella della superficie se immaginando staccati i punti multipli della superficie rimangono staccati anche quelli della linea e se un punto si può muovere sulla linea rispettando le leggi di connessione delle parti tanto della linea quanto della superficie: tra le linee di una superficie la cui orientazione dipende dall'orientazione della superficie, l'A. crede opportuno fissare l'attenzione del lettore su cinque notevoli categorie, le quali, fra l'altro, intervengono nello stabilire le nozioni e le proprietà delle superficie *semplicemente connesse* e *doppiamente connesse.* Invece *lato* di un punto su una linea, *lato* in un punto di una linea su una superficie, *lato* di una superficie nello spazio sono concetti preliminari necessari per intendere

(1) V. ad es. Neumann, op. cit., p. 151.

esattamente che s'intenda per intersezioni di linee fra loro, di superficie fra loro e di linee con superficie e per altri scopi. Giunto a questo punto l'A. sottopone le figure da studiare ad una nuova limitazione supponendo che in una qualunque delle linee o superficie considerate in ogni punto gli intorni di ciascun gruppo si possano scegliere sufficientemente piccoli in modo da risultare ciascuno semplicemente connesso. Poi svolge delle importanti considerazioni che lo guidano alla definizione di superficie *unilatere* e *bilatere:* vista l'impossibilità di riassumerle, ci restringiamo a rammentare il procedimento pratico indicato da Möbius per formarsi un concetto di queste due specie di superficie (da lui scoperte sullo scorcio del 1858): « Siano A, B, B', A' i quattro vertici di un rettangolo di carta scritti nell'ordine in cui si succedono; venga questo rettangolo ripiegato per modo che il lato A'B' si conservi sempre parallelo a se stesso finchè da ultimo coincida con AB; allora la striscia di carta prende la forma d'un cilindro, cioè di una zona bilatera, la quale ha per contorni i due lati AA' e BB' del rettangolo che ora hanno assunta la forma circolare. Ma quando la coppia AA' e BB' di lati opposti è abbastanza grande rispetto all'altra coppia AB e A'B', si può immaginare di far coincidere A' con B e B' con A, dopo avere proceduto nel modo seguente: si tenga fisso un estremo AB della striscia, si faccia ruotare l'altro estremo A'B' attorno all'asse longitudinale della striscia, finchè AB e B'A' abbiano la stessa direzione. Eseguita l'anzidetta sovrapposizione nasce una superficie avente una sola linea di contorno, quella cioè costituita dalle linee AA' e BB', ora incurvate e connesse tanto in A e B' quanto in A' e B. Questa superficie ha però una sola faccia; perchè — se vogliamo render ciò palese anche in altro modo — quando si comincia in un posto qualunque a percorrerla con un pennello colorato e si continua senza mai oltrepassare col pennello l'orlo della superficie, si giunge tuttavia a colorire in un punto qualunque le due facce opposte di superficie ad esso adiacenti » (1).

Nè queste sono le uniche considerazioni materiali che è opportuno invocare in questo argomento; altre se ne trovano (ad alcune delle quali non sdegnò di ricorrere lo stesso Möbius) (2) di cui crediamo convenga far qui un rapido cenno. Immaginiamo una sfera flessibile ed estendibile nella quale siano stati operati due buchi e deformiamola in modo da portare a coincidere gli orli di questi buchi. Se tre punti dell'uno vengono a coincidere con tre dell'altro succedentisi nel senso opposto, otterremo una superficie bilatera detta *sfera con un manico;* se al contrario tre punti dell'un orlo ven-

---

(1) *Ueber die Bestimmung des Inhalt eines Polyeders*, 1865 (A. J. Möbius, *Gesammelte Werke*, II Bd. 484-5). Cfr. anche *Mittheilungen aus Möbius Nachlass* (op. cit., p. 519-521).

(2) Si veggano varii passi della bellissima (e forse troppo poco studiata!) *Theorie der elementaren Verwandschaften* (Ges. Werke, II Bd., p. 433-471). V. inoltre Dyck, *Beiträge zur Analysis situs*, I *Aufsatz*. (*Mathematische Annalen*, Bd. XXXII, p. 457 e seg.).

gono a coincidere con tre dell'altro succedentisi nello stesso senso, otterremo una superficie unilatera chiusa con un *intreccio di seconda specie*. Se invece immaginiamo che nella sfera anzidetta sia praticato un solo buco e la deformiamo portando a coincidere i punti diametralmente opposti dell'orlo di questo, otterremo una superficie unilatera con un *intreccio di prima specie*. Ripetendo queste operazioni deformatrici risp. p, p'' e p' volte su una sfera avente $2p+2p''+p'$ buchi e praticando in essa poi altri n buchi, si ottiene una *superficie normale* avente p manichi, p' intrecci di 1ª e p'' intrecci di 2ª specie, nonchè ω buchi.

XIII. Il capitolo *decimoterzo* — il quale racchiude una nuova esposizione della teoria della connessione delle superficie — si apre con una serie di osservazioni riflettenti le alterazioni che subisce una linea o una superficie in causa di tagli in essa operati (notiamo, ad esempio, la possibilità di decomporre mediante convenienti tagli una linea o una superficie in un numero finito o infinito di parti elementari), osservazioni che inducono l'A. a restringere i proprî studi alle superficie le quali oltre soddisfare le condizioni dianzi indicate, siano tali che esse e tutte le loro parti, ottenute con un numero finito di tagli, si possano sempre spezzare in un numero finito di parti semplicemente connesse.

Dato un gruppo G composto di un numero qualunque finito s di superficie, s'immagini di decomporlo mediante tagli in un certo numero finito α di parti semplicente connesse; di questi tagli τ_1 (siano di prima specie, cioè) abbiano i loro estremi in una stessa porzione di contorno di una fra le date superficie, τ_2 li abbiano in due porzioni differenti e τ_4 siano rappresentati da linee elementari tutte contenute in una delle superficie date: gli altri tagli siano dati o da linee elementari con un solo estremo interno al contorno o da linee chiuse sciolte. Orbene il numero $K=\tau_1+\tau_2-\tau_4-\alpha$ è indipendente dal modo con cui si sono eseguiti i tagli, dipende unicamente dalla struttura del gruppo dato e si chiama *numero fondamentale* del gruppo stesso. In particolare una superficie isolata possiede un numero fondamentale; se si chiamano K_1 K_2 ... K_s i numeri fondamentali dei membri del gruppo G, fra essi e il numero fondamentale del gruppo stesso intercede la relazione $K=K_1+K_2+\ldots+K_s-2s+2$.

È importante e non difficile rendersi conto delle alterazioni che subisce il numero fondamentale di una superficie quando si operi in essa un taglio di assegnata specie. Notevole è che il numero fondamentale di una superficie non può essere negativo ed è nullo soltanto quando essa è aperta; esso è eguale a 1 se la superficie è semplicemente connessa, e, viceversa, se una superficie aperta o bilatera ha 1 per numero fondamentale, essa è semplicemente connessa.

Oltre al numero fondamentale K, in una superficie bilatera aperta o chiusa con $\omega \geqq 0$ orli, si può considerare il numero, p, esprimente il massimo numero di tagli trasversali di prima specie o chiusi che si possono praticare nella superficie senza spezzarla: esso si chiama *genere* della superficie ed è legato a K e ω dalla relazione $K=2p+\omega$. Anche in una

superficie unilatera si può considerare un *genere;* chiamandolo π, si ha $\pi = K - \omega$, K e ω avendo i significati precedenti.

Un altro numero si suol considerare in una superficie, unilatera o bilatera; è quello che si chiama ordinariamente *ordine di connessione* o semplicemente *connessione* della superficie. Chiamandolo Γ si ha $\Gamma = K + 2$ se la superficie è chiusa e $\Gamma = K$ se è aperta. Se la superficie è bilatera e di genere p si ha inoltre $\Gamma = 2(p+1)$ se è chiusa e $\Gamma = 2p + \omega$ se possiede ω orli. Se all'opposto la superficie è unilatera e di genere π, si ha $\Gamma = \pi + 2$ oppure $\Gamma = \pi + \omega$ secondochè essa è chiusa oppure munita di ω orli.

Quali variazioni subisca il genere e la connessione di una superficie quando in essa si facciano dei buchi o dei tagli di specie determinata, vedrà il lettore nella Memoria originale: nella quale egli apprenderà eziandio la ampia estensione che comporta quella celebre relazione fra i numeri delle facce, degli spigoli e dei vertici alla quale è attaccato il nome di Eulero benchè assai prima essa fosse stata rilevata da Cartesio (1). Noi osserveremo come le ora discorse ricerche del De Paolis si distinguano dalle analoghe del Neumann, non solo per l'intento e il metodo, ma anche per una maggiore generalità non presuppondo esse — come quelle di Neumann (2) — la bilateralità delle superficie considerate; si differenziano poi da quelle del Dyck (Mem. citata) perchè in queste abbondano considerazioni analitiche, indispensabili forse per chi tendeva allo studio della connessione in ispazi comunque estesi.

XIV. Col capitolo ora riassunto si chiude la *prima sezione* del lavoro in esame, la sezione riflettente le proprietà dei gruppi di punti. La *seconda sezione*, concernente le corrispondenze che fra questi gruppi si possono stabilire, si apre colla definizione seguente: Dati due gruppi qualunque, se ad ogni elemento dell'uno corrisponde mediante una legge, determinata ma arbitraria, un punto dell'altra, si dice che fra i due gruppi esiste una *corrispondenza biunivoca:* ove occorra distinguere la legge colla quale si passa da un elemento del primo gruppo al corrispondente elemento del secondo, dalla legge che governa il passaggio inverso, si potrà parlare di *corrispondenza diretta* e *corrispondenza inversa.* Di due elementi corrispondenti, uno si dice anche *polo* dell'altro; più generalmente due gruppi formati di elementi che si corrispondono si diranno l'uno *gruppo polare* dell'altro. Un caso limite di corrispondenza si ottiene facendo corrispondere ogni elemento di un gruppo a sè stesso: la relazione che così nasce denominasi *identità.*

Accettando le denominazioni proposte da G. Cantor, l'A. dice che due

(1) Oltre alla *Theorie* di Möbius (p. 467-8; cfr. anche Möbius *Werke,* II Bd., p. 547-551) e la Memoria di Lhuilier ivi citata, si consulti a questo proposito Durège, *Elemente der Theorie der Funktionen einer complexen veränderlichen Grösse,* III Aufl. 1882, p. 226 e seg.

(2) Neumann, op. cit., p. 167-168.

gruppi in corrispondenza biunivoca *hanno la stessa potenza* (tali sono, ad esempio, un segmento e il gruppo di tutti i numerali reali compresi fra 0 e 1) e che un gruppo è *numerabile* se ha la stessa potenza del gruppo costituito dai numeri interi e positivi. Sono numerabili tutti i gruppi di grado finito nonchè tutte le porzioni di gruppi numerabili; così dicasi pel gruppo formato dagli elementi di un gruppo numerabile di gruppi numerabili, per ogni gruppo isolato e per l'aggruppamento che collega un numero finito di gruppi numerabili. Notevole assai è la proprietà, scoperta dal CANTOR, di avere eguale potenza un segmento e l'aggruppamento che collega un numero finito di segmenti. Consegue da essa che un segmento e un quadrato, un segmento e un cubo, un quadrato e un cubo, hanno la stessa potenza, e quindi che i punti di un gruppo finito si possono sempre far corrispondere biunivocamente ai punti di un gruppo di un segmento.

XV. Fra le corrispondenze biunivoche hanno speciale importanza quelle che godono in parte o totalmente la proprietà della continuità: il loro studio è oggetto del capitolo *decimoquinto*, del quale riassumeremo ora i più cospicui risultati, dopo di avere additata in generale l'affinità delle ricerche ivi svolte con alcune che s'incontrano nella più volte citata *Theorie der elementaren Verwandschaften* del MÖBIUS.

Stabilita una corrispondenza biunivoca continua fra un campo lineare c_m e un gruppo di un campo lineare c_n, alla linea c_m corrisponde o tutta c_n o una sua parte. Ogni estremo di una delle due linee in corrispondenza è polo di un estremo dell'altra. È impossibile stabilire una corrispondenza biunivoca continua fra due campi lineari se uno è limitato (oppure finito) e l'altro illimitato (o risp. infinito). Stabilita una corrispondenza biunivoca continua fra due campi lineari, dall'essere uno di essi semplicemente connesso, segue di necessità che anche l'altro lo è, e stabilitane una tra un campo lineare c_m e un gruppo di un campo lineare γ_n, alla linea c_m corrisponde una linea c_n la cui orientazione dipende da γ_n.

Con queste proposizioni presentano perfetta analogia le seguenti. Stabilita una corrispondenza biunivoca continua tra un campo superficiale γ_m e un gruppo di punti di un campo superficiale γ_n, alla superficie γ_m corrisponde tutta γ_n, oppure una sua parte. Ogni punto termine per una delle due superficie corrispondenti è polo di un punto termine dell'altra. È impossibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra due superficie se una è limitata (oppure finita) e l'altra illimitata (o risp. infinita). Stabilita una corrispondenza biunivoca continua fra due superficie, l'essere una di esse semplicemente connessa implica necessariamente che lo sia anche l'altra.

Risulta dai teoremi precedenti che (come è noto) non è continua quella corrispondenza biunivoca che il capitolo precedente insegna potersi stabilire fra un segmento e un quadrato. La condizione necessaria e sufficiente affinchè si possa stabilire una corrispondenza biunivoca continua tra due campi *a*) lineari o *b*) superficiali è risp. *a*) che essi siano egualmente terminati ed ambedue finiti od infiniti, e *b*) che essi siano ambedue finiti o indefiniti e con la stessa legge costituiti da parti semplicemente

connesse. Se ne deduce la possibilità di stabilire una corrispondenza biunivoca continua tra due superficie bilatere aventi lo stesso numero fondamentale e terminate da un egual numero di orli, oppure tra due superficie unilatere aventi pure lo stesso numero fondamentale e terminate da un egual numero di orli, e di più atte a venire ridotte a bilatere collo stesso numero di tagli di determinata specie.

XVI. Le definizioni date e le ricerche compiute dall'A. nel capitolo quindicesimo, sono suscettibili di un'ampia estensione. Si può infatti immaginare che due gruppi di elementi G^m e G^n siano fra loro siffattamente collegati che ad ogni elemento del primo corrisponda un certo numero n di elementi del secondo e ad ogni elemento di questo corrispondano m elementi di quello: si dice allora che fra i due gruppi esiste una *corrispondenza* (m, n), la quale chiamasi *univoca* se uno dei numeri m, n è eguale ad 1, è *biunivoca* se entrambi sono eguali ad 1. Le parole « corrispondenza diretta », « corrispondenza inversa », « gruppi polari », conservano per le corrispondenze (m, n) i significati che avevano nelle binnivoche.

Un elemento si dirà *eccezionale* per una corrispondenza (m, n) se il suo gruppo polare ha un elemento multiplo e questo si dirà elemento *unito*. Supposto $m > 1$, ad ogni elemento di G^m corrispondono n elementi di G^n, ciascuno dei quali ha un gruppo polare formato dall'elemento donde si è partiti e di altri $m-1$: in tal modo ogni elemento di G^m vien fatto corrispondere a $n(m-1)$ elementi del gruppo stesso e fra gli elementi di G^m nasce una corrispondenza $[n(m-1), n(m-1)]$ che si dice *congiunta* alla data. Similmente, supposto $n > 1$, in G^n si avrà similmente una corrispondenza $[m(n-1), m(n-1)]$ che si dirà pure congiunta alla data. Se la corrispondenza data è univoca, si ha una sola corrispondenza congiunta; se è biunivoca non se ne ha alcuna.

Anche fra le corrispondenze $[m, n]$ sono degne di speciale considerazione quelle godenti in varia misura la proprietà della continuità; alcuni dei loro caratteri si riscontrano nelle corrispondenze biunivoche continue, ma altri sono loro proprî. Ad esempio, se tra due gruppi G^m e G^n contenuti risp. nei campi C_m e C_n è stabilita una corrispondenza $[m, n]$ continua, i gruppi dei punti eccezionali e dei punti uniti di G^m e G^n sono chiusi risp. su C_m e C_n; se è continua una corrispondenza univoca $[1, n]$ stabilita fra due gruppi G^1 e G^n contenuti risp. nei campi C_1 e C_n e se G^m è finito e chiuso su C_m anche la corrisp. inversa è continua, ecc. ecc.

In seguito l'A. intraprende una serie di indagini di cui ci duole non poter porgere al lettore un'immagine fedele; ce ne duole vista la loro importanza, perchè mentre da una parte iniziano uno studio geometrico delle funzioni algebriche, dall'altra forniscono all'A. gli elementi per potere introdurre e adoperare le superficie di Riemann, le quali appaiono qui per la prima volta come ausiliari potenti in ricerche geometriche: è questa una innovazione importante il cui merito spetta, per quanto crediamo, totalmente al Prof. De Paolis. Per mettere in rilievo quanto frutto possano ricavare i geometri dalla geniale concezione del grande analista di Gottinga, è sufficiente che si tenga presente il seguente teorema: « Ogni

corrispondenza $[m, n]$ continua fra due superficie γ_m e γ_n si può dedurre da una corrispondenza biunivoca continua fra due altre superficie ρ_m e ρ_n risp. costituite con m ed n fogli sovrapposti alle γ_m e γ_n ». La costruzione ingegnosa di quelle superficie e la considerazione dei loro generi in confronto con quelli di γ_m, γ_n conducono ad una relazione generale fra i generi di queste ed i numeri dei punti di diramazione della data corrispondenza; da cui, grazie alla rappresentazione delle funzioni algebriche di una variabile mediante superficie reali, si trarrebbe subito come corollario una nota formola di corrispondenza di ZEUTHEN (1).

XVII. La possibilità di una corrispondenza non è legata all'ipotesi che si considerino due soli gruppi di elementi. Invero, se si immagina di avere un qualsivoglia numero r di gruppi di elementi G^{m_1} G^{m_2} ... G^{m_r} si può supporre che essi siano legati fra loro in guisa tale che, scelto ad arbitrio un elemento in tutti i gruppi uno G^{m_i} eccettuato, resti in conseguenza determinato un certo numero m_i di punti dal gruppo escluso: si dirà allora che fra i dati gruppi esiste una corrispondenza $[m_1\, m_2 \ldots m_r]$ di cui $\rho = r - 1$ è il *rango* e $m_1 + m_2 + \ldots + m_r$ è l'*ordine* in particolare, la corrispondenza si denominerà h *-univoca* se h dei numeri m_i sono eguali ad 1; se non tutti questi numeri sono eguali ad 1, la corrispondenza presenterà *elementi eccezionali* e *elementi uniti*.

Si può in particolare supporre che i gruppi dati coincidano in un solo G e che tutti i numeri m_i siano eguali ad uno stesso m. Presi allora ad arbitrio $r - 1$ elementi di G, ne restano individuati altri m, e può accadere che il gruppo di grado $m + r - 1$ formato da tutti questi elementi, abbia la proprietà che $r - 1$ arbitrarî dei suoi membri abbiano lo stesso gruppo polare comunque essi vengano distribuiti ciascuno in uno dei dati gruppi. In tal caso la corrispondenza è *involutoria*.

Oltre a queste particolari corrispondenze, sono degne di studio speciale, le corrispondenze di qualunque rango fornite in vario grado di continuità; le loro proprietà sono simili a quelle di cui godono le corrispondenze di primo rango.

Tali sono le linee generali del robusto lavoro del Prof. DE PAOLIS, il quale sarà al certo accolto festosamente da tutti i cultori delle scienze esatte, vuoi per la rara importanza del contenuto, vuoi per la speranza che essa preceda l'opera, sì impazientemente attesa, ove la teoria delle curve e delle superficie algebriche, troverà un fondamento geometrico pienamente soddisfacente. Tutti si accingano quindi coraggiosamente allo studio di essa; e se talora nel percorrerla fossero tentati di fare un appunto all'autore di non aver tenuto conto abbastanza della raccomandazione implicitamente contenuta nelle parole di PASCAL: « Les matières de géométrie sont si sérieuses d'elles mêmes, qu'il est avantageux qu'il s'offre quelque occasion pour les rendre un peu divertissantes », riflettano che le occasioni di cui

(1) Mathem. Annalen, Bd. III, p. 150.

parla l'autore delle *Pensées* sono in realtà assai rare, nè si offrono a colui che compie quelle faticose ricerche necessarie per organizzare una teoria perfettamente rigorosa e della massima generalità possibile.

GINO LORIA.

Sopra una recensione agli « Elementi di Aritmetica del Prof. S. PINCHERLE » (G. Frattini, « Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario, » fascicolo I, 1891).

« Pur di non venir meno al rigore scientifico che si è imposto, l'autore non è schivo di savie concessioni all'opportunità didattica. »

Così si esprime il sig. FRATTINI parlando degli *Elementi di Aritmetica* del Prof. S. PINCHERLE [1], lasciando però il dubbio nel lettore se queste savie concessioni debbano esser *limitate* ad accettare dall'intuizione più di quello che ad essa scientificamente possa domandarsi, o se possano *estendersi* alle definizioni o anche *a quegli schiarimenti che prendono forma di definizione.*

Nel primo caso sono vere e proprie concessioni che la scienza non può esimersi dal fare alla didattica; nel secondo caso però sono inesattezze molto dannose in un libro elementare foss'anche solo per il fatto che i giovanetti non possono fare altro che accettare come *sana verità* tutto quello che trovano sul libro, o che imparano dalla voce del maestro.

Il dubbio che può nascere nel lettore alle parole del sig. Frattini è causato da ciò, che effettivamente nel libro citato dal sig. Pincherle le definizioni fondamentali lasciano a desiderare, e molto, in fatto di rigore, come è facile convincercene, esaminando le seguenti:

Pag. 11, § 17.

« L'addizione è l'operazione per la quale le unità di due o più numeri dati si riuniscono in un sol numero. »

E *riunire* che cosa significa? È del resto noto che almeno per ora non è stato possibile dare una definizione di somma senza ricorrere ad altri concetti più complicati. Il sig. PEANO ha provato che ammettendo come noto per mezzo dell'intuizione il significato dell'operazione $a+1$, ove a è un numero intero, si ha, con logiche deduzioni, il significato di $a+b$, ove a e b sono numeri qualunque. La concessione che può farsi alla didattica elementare è dunque di ammettere come noto per mezzo dell'intuizione il significato di $a+b$, ma non è conveniente andare più in là, e quindi bisogna rassegnarsi a non definire la somma.

Pag. 16, § 22.

« La sottrazione è l'operazione per la quale dalle unità di un numero dato si tolgono quelle di un altro numero pure dato (necessariamente non maggiore). »

E *togliere* che cosa significa? Alcuni ammettono che appartenga all'in-

---

[1] Edita da Zanichelli, Bologna

tuizione anche il *sottrarre* come il *sommare;* ma in tal caso non si definisce nè l'uno nè l'altro. Però la sottrazione non appartiene al campo della intuizione, e basterebbe a provarlo solo il fatto che essa può definirsi *rigorosamente* ricorrendo al concetto di somma. Del resto dimandando all'intuizione il significato di $a-b$, con $a>b$, bisogna porre come postulato $(a-b)+b=a$, il che tradotto in parole dà: « La differenza di due numeri diseguali è quel numero che sommato col minore di essi dà per somma il maggiore »; e questa è una vera e propria definizione.

Pag. 20, § 28.

« La moltiplicazione è l'operazione per la quale un numero si prende tante volte quante sono le unità di un altro. »

E dopo averlo preso che cosa se ne fa? (1).

Pag. 78, § 85.

« Si chiama grandezza tutto ciò che si può pensare raddoppiato. »

Con ciò l'A. suppone che se A è una grandezza $A+A$ abbia significato e $A+A$ sia ancora una grandezza; in tal modo la definizione riportata, insieme ai due postulati, ci dà per ogni grandezza le grandezze di essa multiple secondo 2^n e niente altro. La definizione, che del resto ha bisogno di due postulati per diventar tale, non caratterizza che una classe limitatissima di grandezze. Si capisce che la definizione riportata unita ad un sistema di postulati può dare una teoria delle grandezze, ma essa sola serve a nulla.

Pag. 106, § 111.

« Il prodotto è formato dal moltiplicando, come il moltiplicatore è formato con l'unità. »

A pag. 112 l'A. dice: « Moltiplicare un numero qualunque A per $^3/_5$ vuol dire, secondo la definizione del § 111, *dividere* A *in 5 parti eguali e prenderne 3* (?). Ciò si esprime anche dicendo che *si son presi i* $^3/_5$ *di* A, talchè le due espressioni — *prendere i* $^3/_5$ *di* A — *moltiplicare* A *per* $^3/_5$ — sono equivalenti. »

La deduzione sarebbe possibile certamente se nella definizione del § 111 fosse dato il significato della parola *formato*. Ora tale significato non solo non è dato, ma credo sia anche impossibile fissarlo senza alterare il significato ordinario della parola *formare*, e quindi la definizione del § 111, che è usata da molti, non può ritenersi che come una definizione apparente, propria della metafisica e non della matematica.

C. Burali-Forti.

Torino, marzo 1891.

---

(1) Si osservi che le definizioni fin qui riportate si riferiscono solo ai numeri interi.

Dott. H. Simon. — *Costruzioni geometriche senza compasso.* — (Geometrische Konstructionen ohne Zirkel. *Zeitschrift für Math. und naturwiss. Unterricht von J. C. V. Hoffmann.* — Anno 1891, pag. 81).

Il Dott. Simon rilevò alcune costruzioni elementari di geometria che si possono ottenere coll'ammettere solo di poter tracciare e prolungare la retta che unisce due punti, e sopra una data retta portare un segmento uguale ad un segmento dato. Ogni punto del piano risulta così determinato o dall'incontro di due rette, o come estremo di un dato vettore.

I problemi che il Simon risolve, sono: Condurre da un punto la parallela ad una retta; dividere per metà un angolo od un segmento; dividere un segmento in n parti uguali; costruire un angolo retto, condurre da un punto la perpendicolare ad una retta, costruire l'asse radicale di due cerchi determinati coi loro centri e raggi, e quindi tutte le altre costruzioni che dipendono dalle precedenti, come determinazione della terza e quarta proporzionale, divisione di una retta in media ed estrema ragione, costruzione del quadrato, del rombo di date diagonali, ecc. (1).

Si possono eseguire senza compasso le principali operazioni del calcolo geometrico, specialmente quelle relative alle formazioni di prima specie, come la determinazione del baricentro di un sistema di punti di pesi razionali, e le operazioni sui vettori.

Accennerò ad alcune soluzioni date dall'autore, e mi servirò per maggiore semplicità della notazione propria al calcolo geometrico.

1) Condurre da P la parallela ad una retta a. — Preso sulla a un vettore $B - A$, si trovino i punti C, D, tali che: $C = 2A - P$, $D = 2B - C$; sarà PD parallelo ad a.

2) Trovare il punto medio del vettore $B - A$. (Determinare il punto $\frac{A+B}{2}$). — Preso il vettore m non parallelo a $B - A$, si cerchino i punti C, D, E, tali che: $C = A + 2m$, $D = C + m$, $E = 2D - B$; il punto d'incontro di EC con AB sarà il punto medio di AB.

3) Determinare la n^{esima} parte del segmento AB. (Determinare il punto $\frac{A+(n-1)B}{n}$). — Preso il vettore m non parallelo a $B - A$, si determinino i punti C, D, E, F, tali che: $C = A + (n-1)m$, $D = C + m$, $E = D + m$, $F = 2B - E$; sia M il punto d'incontro di FC con AB, sarà $MB = \frac{1}{n} AB$, cioè $M = \frac{A+(n-1)B}{n}$.

---

(1) Il prof. E. Deamicis, dell'istituto tecnico di Alessandria, mi scrive di avere già da qualche anno introdotto nella scuola la distinzione tra la geometria della retta e quella del compasso, e risolti senza compasso, nelle predette ipotesi, gli stessi ed altri problemi.

4) Costruire un angolo retto di vertice C. — Si tiri per C un segmento CP, e per P una retta su cui si segnino due punti A e B tali che $AP = PB = CP$. Sarà l'angolo ACB retto.

5) Innalzare ad una retta a la perpendicolare in un punto A. — Il Simon dà di questo problema due soluzioni di cui una è la seguente: Presi sulla a due punti B e C tali che $AB = BC$, si conduca per A una retta ad angolo e su di essa si segnino i punti D, E, tali che $AD = DE = AB$; sia H il punto di mezzo di EC, e si porti sulla AC un segmento $AL = AH$ e sulla AH un segmento $AM = AD$; si raddoppi LM in N, sarà NA perpendicolare ad a.

Un'altra soluzione di questo problema si può dedurre dalla teoria dell'involuzione; siano b, b', c, c' i lati di due angoli retti di vertice A; si determini il corrispondente di a nella involuzione ciclica bb', cc'; sarà a' perpendicolare ad a.

6) Costruire l'asse radicale di due circonferenze di dato centro e raggio. — Siano C_1, C_2 i due centri, r_1, r_2 i due raggi; sia $C_1C_2 = c$, e Q il punto incognito in cui l'asse cercato incontra la centrale C_1C_2. Poniamo $C_1Q = p_1$; $QC_2 = p_2$; sarà $p_1^2 - p_2^2 = r_1^2 - r_2^2$ e quindi

$$p_1 - p_2 = \frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{2c}.$$

Il segmento $p_1 - p_2$ è una quarta proporzionale dopo segmenti dati, quindi se ne deduce facilmente la posizione di Q. La perpendicolare in Q alla centrale C_1C_2 sarà l'asse cercato.

Un altro modo consiste nel cercare altri punti dell'asse stesso.

Dalle soluzioni precedenti si deduce la costruzione del triangolo rettangolo dati i cateti, quindi della espressione $a\sqrt{m}$ dove a è un segmento, ed m un numero razionale. Si può costruire un angolo uguale ad un angolo dato, e quindi alcuni poligoni regolari come il triangolo equilatero, il quadrato, l'esagono, l'ottagono ed altri.

Non pare possibile determinare coi mezzi suddetti i punti d'incontro di due cerchi, o di una retta con un cerchio, e quindi nemmeno la media proporzionale tra due segmenti qualunque, eccetto che in casi particolari. La media proporzionale di due segmenti si può determinare senza compasso quando i due segmenti sono commensurabili, cioè quando il loro rapporto è razionale, perchè il problema è ridotto alla costruzione della espressione $a\sqrt{m}$.

Dati i tre lati di un triangolo non si possono determinare i vertici, ma su ciascun lato si può determinare il piede dell'altezza, gli estremi delle bisettrici, i punti di contatto delle circonferenze tangenti ai lati, ed altri elementi.

Torino, maggio 1891.

F. Castellano.

S. Dickstein — *Pojęcia i metody matematyki,* tomo I. — Warszawa, 1891, pag. 268. Prezzo rubli 2,50.

Di quest'opera « Idee e metodi della matematica, » è or ora uscito il primo volume « Teoria delle operazioni ». A causa dell'importanza e attualità del soggetto, annunziamo la comparsa di questo libro, pubblicandone un sommario, e riservandone la recensione, dopo di averlo attentamente letto.

Nell'*introduzione* l'A. tratta dell'*oggetto della matematica*, e esamina le idee di Kummer, Dedekind, Cantor, Kant, Grassmann, Wronski, ecc. In seguito (N. 2) delle *grandezze*, del modo di considerarle secondo Grassmann, Helmoltz, ecc. Nel N. 3 si discutono le forme discontinue e continue. Il N. 5 è dedicato ai mutui rapporti della matematica e della logica, e dell'importanza per quella dei recenti studi su questa. Il N. 7 si riferisce al principio della conservazione delle leggi formali.

Il capitolo I (numeri interi) tratta (N. 8) delle operazioni dirette e (N. 9) delle inverse; nel N. 10 dei numeri transfiniti di Cantor.

Il cap. II (teoria delle operazioni formali) sviluppa (N. 11) le teorie di Grassmann e Hankel, e (N. 12) quella di Dedekind sulle rappresentazioni.

Il cap. III si riferisce ai numeri fratti, e discute le trattazioni di Weierstrass, Kronecker e Méray.

Il cap. IV sui numeri negativi, tratta dello sviluppo storico del loro concetto, e delle operazioni su essi.

Il cap. V contiene la storia e le operazioni dei comuni complessi.

Il cap. VI si riferisce ai complessi d'ordine qualunque. Dapprima si segue il Weierstrass; molte pagine sono dedicate all'Ausdehnungslehre di Grassmann; e infine trovasi un cenno sui quaternioni di Hamilton.

Il cap. VII ed ultimo (funzioni intere) contiene i risultanti, le funzioni simmetriche, le derivate, i determinanti Wronskiani e Jacobiani, la formula di Taylor, le differenze finite, le formule d'interpolazione e i numeri di Bernoulli.

Tutti i capitoli sono seguiti da ricchissime citazioni delle fonti.

La difficoltà della lingua (polacca) è più apparente che reale, poichè le formule, i termini di matematica già comuni a tutte le lingue, e lo stile proprio dei matematici ne facilitano assai la lettura.

(P.)

Sulle equazioni differenziali lineari.

Nota di F. Gerbaldi *a Palermo.*

Fra le varie dimostrazioni, che furono date del teorema di Fuchs sulle equazioni differenziali lineari dotate di integrali tutti regolari nell'intorno di un punto, notevole per semplicità ed eleganza è quella che si trova nel *Cours d'analyse* del Jordan (T. III, p. 177-187). Nell'ultima parte però di questa dimostrazione si presenta un inconveniente, che parmi importante rilevare.

Dopo di avere stabilito (N. 146, 147) che le condizioni dell'enunciato del teorema sono necessarie, vuolsi dimostrare che esse sono sufficienti. Perciò si comincia dall'esporre (N. 149) il metodo con cui calcolare i coefficienti di certe serie che entrano nella composizione dell'integrale; indi si passa a far vedere (N. 150) che le serie così calcolate sono convergenti; ed a questo scopo occorre dimostrare che una successione di quantità positive d_μ ha un limite superiore. Tale proprietà delle quantità d_μ si vuole nel citato libro dedurre semplicemente dalla disuguaglianza

$$(1) \qquad d_\mu \leqq \frac{4\theta}{\mu} \sum_0^{\mu-1} d_\lambda$$

ove 4θ è una costante positiva.

È in questo punto che viene a mancare il fondamento alla dimostrazione, se noi osserviamo che dalla sola disuguaglianza (1) non si può dedurre la voluta proprietà delle d_μ, ed a prova di ciò diamo l'esempio seguente:

$$d_\mu = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+\mu-1)}{1.2.3\dots\mu} = \binom{a+\mu-1}{\mu}$$

supposto $\qquad 1 < a < 4\theta.$

Queste quantità, essendo $a > 1$, crescono (come è noto) oltre ogni limite al crescere di μ. Esse tuttavia soddisfano alla disuguaglianza (1); infatti si ha:

$$\sum_0^{\mu-1}{}_\lambda \binom{a+\lambda-1}{\lambda} = \binom{a+\mu-1}{\mu-1} = \frac{\mu}{a}\binom{a+\mu-1}{\mu}$$

ossia
$$\sum_0^{\mu-1} d_\lambda = \frac{\mu}{a} d_\mu,$$

donde, essendo per ipotesi $a < 4\theta$, segue la (1).

Pertanto non può reggere la dimostrazione, colla quale nel citato libro si vuol dedurre dalla disuguaglianza (1) che la successione delle d_μ ha un limite superiore. L'errore si incontra quando, avendo trovato

$$d_{\mu+1} < \left[\frac{4\theta}{\mu} + \left(\frac{4\theta}{\mu}\right)^2\right] \sum_{0}^{\mu-1} d_\lambda ,$$

si conchiude per analogia (pag. 186)

$$d_{\mu+m} < \left[\left(\frac{4\theta}{\mu}\right) + \left(\frac{4\theta}{\mu}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4\theta}{\mu}\right)^{m+1}\right] \sum_{0}^{\mu-1} d_\lambda .$$

Col procedimento colà indicato si sarebbe invece dovuto conchiudere:

$$d_{\mu+m} < \frac{4\theta}{\mu}\left[1 + \frac{4\theta}{\mu}\right]^m \sum_{0}^{\mu-1} d_\lambda .$$

Ma da questa disuguaglianza, anche se $\mu > 4\theta$, non segue più come dalla precedente l'esistenza di un limite superiore per la quantità d_μ, perchè $\left[1 + \frac{4\theta}{\mu}\right]^m$ cresce con m oltre ogni limite.

Notiamo da ultimo che la condizione necessaria e sufficiente, affinchè una successione di quantità d_μ, che soddisfano alla disuguaglianza (1), abbia un limite superiore, è che sia $4\theta \leqq 1$, e che di questa condizione non si è tenuto conto nella citata dimostrazione del Jordan.

Quistioni II e III.

II. È possibile o no, in generale, decomporre in parti sovrapponibili due tetraedri di egual base ed altezza?

III. È possibile o no, in generale, servendosi della sola riga, costruire un segmento medio proporzionale fra due segmenti dati, anche ammettendo (se occorre) di poter prendere sopra qualsivoglia retta data, a partire da un suo punto dato qualunque e da entrambe le bande di esso, un segmento eguale a qualsiasi segmento dato?

Alessandria, 21 maggio 1891.

E. De Amicis.

Le proprietà fondamentali delle operazioni della Logica deduttiva

studiate dal punto di vista d'una teoria generale delle operazioni.

Nota di G. Vailati *a Crema.*

Le definizioni di somma e prodotto logico e le proprietà principali di queste operazioni possono supporsi già abbastanza famigliari ai lettori di questa *Rivista* per aver bisogno d'esser nuovamente esposte prima di essere fatte oggetto delle presenti osservazioni.

Tornerà invece più opportuno per l'intelligenza di quanto segue, il richiamare brevemente alcuni concetti fondamentali del calcolo delle operazioni, quelli cioè di *relazione*, di *operazione* e di *proprietà combinatorie.*

Supponiamo dato un sistema di enti od oggetti qualunque e si sia tra essi stabilita una corrispondenza tale che, dato un oggetto a qualunque tra essi, siano determinati uno o più oggetti $b, c,\ldots$ del sistema stesso come corrispondenti ad a.

Per indicare che b è uno degli oggetti che vengono in tal modo a corrispondere ad a, conveniamo di scrivere le due lettere a, b l'una di seguito all'altra frapponendo loro un segno speciale, per es. $\supset$.

Il fatto che per due oggetti a, b del sistema si ha, nel senso sopradefinito, $a \supset b$ si esprime dicendo che fra a e b sussiste la relazione $\supset$; i due oggetti a, b diconsi i membri della relazione [V. nota (a)].

Fra gli oggetti dello stesso sistema venga ora stabilita un'altra corrispondenza in virtù della quale scelti due qualunque tra essi (succedentisi in un dato ordine) per es. a, b ne sia determinato un terzo c pure appartenente al sistema come corrispondente alla coppia scelta.

In questo caso la corrispondenza individua ciò che noi chiamiamo un'operazione, a, b diconsi i termini su cui essa si eseguisce, c il risultato della sua esecuzione in corrispondenza ai termini a, b. Tale risultato lo designeremo scrivendo le due lettere a, b l'una di seguito all'altra (nell'ordine indicato) e separandole con un segno speciale per es. $\frown$ che serva a denotare l'operazione di cui si tratta: $a \frown b$. [Vedi nota (b)].

Il risultato d'un'operazione eseguita su due dati termini, essendo anch'esso come i termini da cui deriva un oggetto appartenente al sistema (in conformità alla definizione di *operazione* data di sopra) potrà alla sua volta essere assunto come uno dei termini per un'ulteriore esecuzione sia della stessa operazione, sia d'un'operazione nuova (da definirsi collo stabilire una seconda corrispondenza simile a quella che ci servì a definire la prima operazione): il risultato che così si

ottiene si potrà poi allo stesso modo assumere come termine in una successiva operazione, e così via.

Giovandoci, per formulare questo processo, delle notazioni già introdotte, verremo ad ottenere delle *espressioni* nelle quali, oltre alle lettere designanti i vari oggetti del sistema presi in considerazione e a cui si dà il nome di *argomenti*, figureranno pure i segni di una o più operazioni eseguite su di essi e sui risultati man mano ottenuti. In tali espressioni ci sarà inoltre necessario introdurre altri segni speciali per evitare ambiguità rispetto all'ordine in cui le operazioni in esse indicate vogliono essere eseguite ([1]).

Se una relazione tra i risultati di due espressioni sussiste in corrispondenza a ogni possibile scelta (tra gli oggetti del sistema) degli argomenti che figurano nei suoi due membri si dice che tal relazione sussiste *identicamente* tra le due espressioni date.

Se essa invece sussiste solo in corrispondenza a certe determinate scelte degli argomenti stessi dicesi una *relazione di condizione*.

Il fatto che una relazione $\supset$ tra due date espressioni ([2]) sussiste identicamente o anche solo il fatto che essa sussiste ogni qualvolta gli argomenti che vi figurano soddisfino a una o più determinate relazioni di condizione ([3]) costituiscono ciò che chiamiamo una *proprietà combinatoria* della relazione $\supset$ e delle operazioni che compaiono nelle espressioni che si considerano.

Oggetto del calcolo delle operazioni è appunto lo studio delle proprietà combinatorie sopra definite: i problemi che in esso si presentano si possono riferire all'uno o all'altro dei seguenti due tipi fondamentali:

1) Partendo dalla supposizione che un'operazione o sistema di operazioni possieda certe determinate proprietà combinatorie, quali altre proprietà combinatorie si può dimostrare che essa possiede.

2) Quali tra le proprietà combinatorie d'un'operazione o sistema di operazioni è necessario assumere come primordiali se si vogliono dimostrare tutte le altre proprietà combinatorie che tale operazione o sistema di operazioni effettivamente possiedono [V. nota (*c*)].

([1]) Sull'uso di questi ultimi segni (parentesi o punti) è superfluo qui entrare in dettagli.

([2]) Dicendo tra due *espressioni* non s'intende escludere il caso che una di queste o anche ambedue si riducano a una sola lettera. Così, per es., $a \supset b$ è una relazione di condizione.

([3]) Queste relazioni di condizione possono poi alla loro volta essere asserite, sia incondizionalmente, sia anche solo per ogni caso in cui gli argomenti che vi figurano o parte di essi soddisfino a qualche altra relazione di condizione.

In questo scritto mi propongo di presentare un saggio di risoluzione d'un problema di questo secondo tipo riferentesi al sistema d'operazioni del calcolo logico.

Questo problema può enunciarsi più definitamente sotto la seguente forma:

Qual è il minimo numero di postulati che è necessario ammettere se si vuol dimostrare che per un sistema di operazioni hanno luogo tutte le regole di calcolo espresse dalle note formole fondamentali della Logica matematica.

Per un'esposizione nello stesso tempo chiara e succinta di tali formole rimandiamo il lettore agli articoli pubblicati dal Direttore di questa *Rivista* sull'argomento, nei fascicoli di gennaio e febbraio.

La previa conoscenza di questi e in generale la previa conoscenza dei fondamenti del calcolo logico senza essere assolutamente presupposta in chi legga le seguenti pagine, gli servirà in ogni caso per poter seguire con competente interesse il corso dei ragionamenti che vi si espongono rendendolo fin dal principio chiaramente conscio di ciò che in inglese si chiamerebbe il loro *drift,* in altre parole di ciò che costituisce la loro ragione d'essere e fa sì che non si riducano ad una mera analisi di definizioni arbitrarie o all'elaborazione delle conseguenze di ipotesi cui non corrisponde nessuna situazione di fatto, reale o immaginabile. Solo il calcolo logico (sinora almeno) può offrire alle considerazioni astratte in cui entriamo un campo concreto e, direi quasi, *pratico* di applicazione.

Designamo col segno $\supset$ una relazione tra oggetti d'un dato sistema la quale goda delle due seguenti proprietà:

1) Se due oggetti a, b del sistema sono tali che si abbia $a \supset b$, allora per qualunque oggetto k per cui sia $k \supset a$, sia anche $k \supset b$

2) e viceversa. Se per qualunque oggetto k del sistema per cui si abbia $k \supset a$ si ha anche $k \supset b$, allora abbia luogo $a \supset b$.

Designamo poi col segno $+$ un'operazione eseguibile sugli oggetti del sistema stesso e caratterizzata dalle seguenti due proprietà combinatorie:

1) Per qualunque oggetto k del sistema per cui si ha $a + b \supset k$ si abbia pure contemporaneamente $a \supset k$ e $b \supset k$

2) e viceversa. Per qualunque oggetto k del sistema per cui si abbia contemporaneamente $a \supset k$ e $b \supset k$ abbia pure luogo $a + b \supset k$.

Designamo infine col segno $\times$ un'altra operazione eseguibile sugli stessi oggetti e tale che:

1) Per qualunque oggetto k del sistema per cui si abbia $k \supset ab$ [1] si abbia contemporaneamente $k \supset a$ e $k \supset b$

2) e viceversa. Per qualunque oggetto k per cui si abbia contemporaneamente $k \supset a$ e $k \supset b$ si abbia pure $k \supset ab$.

Sulla natura della relazione $\supset$ e delle operazioni $+$, $\times$ noi ci asteniamo assolutamente da ogni supposizione: non ci è necessario conoscere altro, rispetto ad esse, eccetto il fatto che ciascuna gode delle corrispondenti due proprietà combinatorie sopra enunciate, le quali possono anche servire come loro definizione. Queste sei proprietà fondamentali per comodo di riferimento le denoteremo rispettivamente coi segni: $1^{\supset}$, $2^{\supset}$, 1^{+}, 2^{+}, $1^{\times}$, $2^{\times}$.

Basandoci ora unicamente su queste definizioni vediamo quali altre proprietà combinatorie è possibile dimostrare per la relazione $\supset$ e per le due operazioni $+$, $\times$. Nel passare ad una deduzione sistematica di tali proprietà cominceremo a dimostrare alcuni teoremi elementari che si riferiscono alla sola relazione $\supset$.

Th. I. *Per qualunque oggetto a del sistema si ha $a \supset a$.*

Infatti per ogni oggetto k per cui si ha $k \supset a$, si ha per ipotesi $k \supset a$ onde (per la $2^{\supset}$): $a \supset a$.

Th. II. *Se si ha $a \supset b$ e $b \supset c$ si ha pure $a \supset c$* [V. nota (d)].

Infatti avendosi $b \supset c$ ed a essendo per ipotesi tale che ha luogo $a \supset b$, esso sarà pur tale (per la $1^{\supset}$) che abbia luogo $a \supset c$.

Th. III. *Se per ogni oggetto k del sistema per cui ha luogo $b \supset k$ ha luogo pure $a \supset k$ si ha $a \supset b$.*

Infatti pel Th. I b è tale che per esso ha luogo $b \supset b$ onde per ipotesi sarà anche tale che per esso abbia luogo $a \supset b$

Th. IV. e viceversa: *Se si ha $a \supset b$, per qualunque k del sistema per cui abbia luogo $b \supset k$ ha luogo anche $a \supset k$.* Questo deriva immediatamente dal Th. II, anzi non è che un'altra forma dello stesso teorema.

Per indicare che si ha $a \supset b$ e inoltre anche $b \supset a$ conveniamo di usare la notazione $a = b$ che si legge *a* eguale a *b*: con ciò non veniamo ad introdurre una nuova relazione ma semplicemente a giovarci d'un artificio abbreviativo che ci servirà a render più concisa l'enunciazione d'una gran parte dei teoremi che seguono. Risulta immediatamente da questa convenzione e dai teoremi precedenti:

$$1)\ a = a, \quad 2)\ \text{Se } a = b \text{ e } b = c,\ a = c, \quad 3)\ \text{Se } a = b,\ b = a.$$

---

[1] Scriviamo più brevemente ab in luogo di $a \times b$, il che non può ingenerare ambiguità.

Un altro mezzo per rendere più rapido e simmetrico l'andamento delle deduzioni seguenti ci è fornito dal fatto che la maggior parte dei teoremi che procediamo a dimostrare si possono distribuire in coppie per modo tale che data l'enunciazione e dimostrazione per uno di ciascuna coppia, l'enunciazione e dimostrazione dell'altro si ottiene da quelle sostituendovi ad ogni segno $+$ che vi figura il segno $\times$ e viceversa a ogni segno $\times$ il segno $+$ e inoltre invertendo i membri di tutte le relazioni $\supset$ che vi compaiono [1].

Valendoci di questa osservazione noi scriveremo i teoremi che in tal modo si corrispondono dualmente l'uno di fronte all'altro in due colonne e tranne in casi speciali ci limiteremo a dimostrarne uno solo.

Th. V. $ab \supset a$
infatti per ogni oggetto k per cui si ha $k \supset ab$ si ha per la $1^\times$: $k \supset a$ onde per la $2^\supset$: $ab \supset a$.

Th. V' [2] $a \supset a+b$
infatti per ogni oggetto k per cui si ha $a+b \supset k$ si ha per la 1^+: $a \supset k$ onde pel Th. III: $a \supset a+b$.

Th. VI. $a = aa$
infatti anzitutto pel precedente si ha $aa \supset a$, inoltre il Th. I applicando la $2^\times$ dà $a \supset aa$.

Th. VI' $a+a=a$

Th. VII. $a(a+b)=a$
infatti anzitutto pel Th. V si ha: $a(a+b) \supset a$: inoltre avendosi $a \supset a$ e, pel Th. V' $a \supset a+b$ si ha pel $2^\times$: $a \supset a(a+b)$.

Th. VII' $a = a + ab$

Th. VIII. Se si ha $a \supset b$ e $c \supset d$ si ha anche $ac \supset bd$
infatti per ogni oggetto k per cui si ha $k \supset ac$ avendosi, per la $1^\times$, $k \supset a$ si avrà, per la $1^\supset$, $k \supset b$: con egual ragionamento si ottiene pure $k \supset d$ onde per la $2^\times$: $k \supset bd$; applicando quindi la $2^\supset$ si ha il teorema.

Th. VIII' Se si ha $a \supset b$ e $c \supset d$ si ha anche $a+c \supset b+d$ [3].

---

(1) Questa specie di dualità proviene dal semplice fatto che, introducendo tali sostituzioni nelle nostre definizioni di $+$, $\times$ otteniamo rispettivamente le definizioni di $\times$, $+$.

(2) I teoremi I, II corrispondono dualmente a se stessi: i teoremi III e IV invece corrispondono rispettivamente a $1^\supset$ e $2^\supset$.

(3) L'enunciazione di questo teorema esattamente corrispondente per dualità a quella del teorema VIII sarebbe la seguente: Se $b \supset a$ e $d \supset c$ si ha $b+d \supset a+c$.

Corollario: Se si ha $a = b$ e $c = d$ si ha anche $ac = bd$, il che si esprime dicendo che $\times$ è una operazione *univoca*.

Th. IX. Se si ha $a \supset b$ si ha pure $a = ab$ e viceversa. Infatti

1) da $a \supset b$ e dal Th. I si ricava pel teorema prec. $aa \supset ab$, che confrontata con $aa = a$ (Th. IV) dà, per la 1°: $a \supset ab$ che col Th. V dà $a = ab$,

2) viceversa da $a = ab$ essendo pel Th. V $ab \supset b$ si ricava pel Th. II: $a \supset b$.

Th. IX' Se si ha $b \supset a$ si ha pure $a + b = a$ e viceversa.

Th. X. $ab = ba$ cioè $\times$ è una operazione *commutativa*.

Th. X' $a + b = b + a$

Th. XI. $abc = a(bc)$ cioè $\times$ è un'operazione *associativa*. Questi due teoremi si dimostrano immediatamente facendo uso delle 2°, 1$\times$ e 2$\times$.

Th. XI' $a+b+c = a+(b+c)$

Th. XII. $ab + ac \supset a(b + c)$ Infatti pel Th. I si ha $a \supset a$ e inoltre pel Th. V': $b \supset b + c$ onde applicando il Th. VIII si ha: $ab \supset a(b+c)$. Ragionando allo stesso modo si otterrà anche $ac \supset a(b + c)$ onde pel 2+ sarà anche:

$$ab + ac \supset a(b + c).$$

Th. XII' $a + bc \supset (a+b)(a+c)$

(*Continua*).

NOTE

(*a*) A corrispondenze di questo tipo fra gli oggetti d'un dato sistema il Dedekind nel suo interessante opuscolo: *Was sind und was sollen die Zahlen* ha dato il nome di *Abbildungen eines Systems in sich selbst.* Come esempi di relazioni a cui tali corrispondenze danno luogo possiamo citare quelle di *uguaglianza* o *disuguaglianza* tra quantità reali o imaginarie, quelle di *coincidenza,* di *sovrapponibilità,* di *similitudine,* di *projettività* tra figure; le relazioni di *equivalenza* o di *equilibrabilità* tra sistemi di forze applicati a un punto o a un sistema di punti connessi, rigidamente o no; le relazioni di *inclusione* od *esclusione* tra classi di oggetti o di « *subsumption* » (Schröder) tra i corrispondenti nomi di classi o d'individui; quelle di *deducibilità* o di *incompatibilità* tra asserzioni; quelle corrispon-

denti ai vari gradi di *consanguineità* o *affinità* già studiate dal Macfarlane (Philosoph. Magazine, 1881) ecc.

(*b*) Come si vede i concetti di operazione e di relazione sono strettamente connessi tra loro: essi rientrano ambedue in quello più generale di *funzione*, che alla sua volta si definisce collo stabilire fra gli oggetti d'un dato sistema una corrispondenza *tale che sceltine comunque un determinato numero* n, *ne siano determinati uno o più altri come corrispondenti agli* n *scelti*.

L'unico concetto che in tal modo ci viene ad apparire come fondamentale è quello di *corrispondenza*, al qual proposito gioverà riportare le seguenti parole del Dedekind (nella prefazione al già citato opuscolo): « So wird « man auf die Betrachtung der Fähigkeit des Geistes geführt, Dinge auf « Dinge zu beziehen, einem Dinge ein Ding entsprechen zu lassen, oder ein « Ding durch ein Ding abzubilden ohne welche Fähigkeit überhaupt kein « Denken möglich ist ».

(*c*) Il merito d'avere per i primi richiamata l'attenzione su questo genere di ricerche e d'aver posto i fondamenti d'una teoria generale delle operazioni, spetta senza contrasto ai matematici inglesi, Peacock, De-Morgan, Gregory e Boole.

Rev. George Peacock — *Algebra*, 1830.

— *On certain branches of analysis*, 1834 (Report of the British Association for the adv. of science).

— *Symbolic Algebra*, 1845.

Augustus De-Morgan — *On the foundations of Algebra* (in Cambridge Philos. Transactions 1841).

— *Double Algebra*, 1849.

In una Memoria di D. J. Gregory (*On the real natural of Symbolic Algebra*) inserita nel volume XIV (1840 o 39?) delle *Transactions of the Royal Society of Edimburgh* si trovano forse per la prima volta esplicitamente e chiaramente espressi i *connotati* di questo nuovo ramo delle scienze matematiche che l'autore presenta sotto il nome di *Symbolic Algebra;* vale la pena di riportare il seguente brano:

« The step wich is taken from arithmetic to Symbolic Algebra is that « *leaving out of view the nature of the operations* wich the symbols we « use represent, we suppose the existence of a *class of unknown opera-* « *tions subjected to the same laws*. And as many different kind of ope- « rations may be included in a class so defined, whatever can be proved « of the class generally is necessarily true of all the operations included « under it. This, it may be remarked, *does not arise from any analogy* « *existing in the nature of the operations that may be totally dissimilar* « *but merely from the fact that they are subjected to the same laws of* « *combination*. And if we can show that any operation *in any science* « *are subject to the same laws of combinations* as those of these classes « *the theorems are true of these as included in the general class* ».

Che a questi precedenti studi si sia appoggiato il Boole nelle sue originali e geniali investigazioni sulla Logica matematica lo dimostrano già a sufficienza le prime parole della sua classica opera (*Mathematical analysis of Logic*):

« They who are acquainted with the *present state of the theory of* « *Symbolical Algebra* are aware that the *validity of the processes of* « *analysis does not depend upon the interpretation of the symbols wich* « *are employed but solely upon the laws of their combination.* Every « scheme of interpretation wich does not affect the truth of the relations « supposed is equally admissible and it is thus that the *same process may* « *under one scheme of interpretation represent the solution of a question* « *on the properties of numbers under another that of a geometrical pro-* « *blem and under a third that of a problem of dynamics* or optics. This « principle is in deed of *fundamental importance* and it may with safety « be affirmed, that the *recent advances of pure analysis have been much* « *assisted by the influence wich it has exerted in directing the current* « *of investigation* ».

(*d*) L'importante proprietà della relazione ↄ espressa da questo teorema fu designata col nome molto appropriato di *transitività* dal De-Morgan, che per il primo si occupò delle *relazioni* in generale dal punto di vista delle loro proprietà combinatorie.

Il fatto che l'uguaglianza tra quantità è una relazione *transitiva* è espressa dall'assioma: Due cose uguali a una terza lo sono tra di loro; sul quale si basa ogni ragionamento che si riferisce a quantità.

Parimenti il fatto che la relazione tra due *nomi a* e *b*, espressa dalla frase « ogni *a* e *b* », è transitiva costituisce il famoso *dictum de omni* sul quale si fonda tutto l'edificio della logica aristotelica. La forma data a quest'ultimo assioma dai logici moderni, per es. dallo Stuart Mill (*Logic*, Book II, Ch. II) (*Whatever is a mark of any mark, is a mark of that wich this last is a mark of*, o in altre parole: *nota notae est nota rei ipsius*) tradotta in simboli dà immediatamente l'enunciazione del teor. II.

In caso che si richiedesse una designazione anche per la proprietà della relazione ↄ espressa dal teorema I (cioè $a \supset a$) non troverei disadatto il nome di *riflessività*.

Come esempi di relazioni *transitive* ma non *riflessive* citiamo quelle espresse dalle frasi: *antecedente a ...*, *susseguente a ...*, *maggiore di ...*, *minore di ...*, *discendente da ...*, *traduzione di ...*

Relazioni *nè transitive*, *nè riflessive* sono per esempio: *adiacente a ...*, *padre di ...*, *non uguale a ...*

Sull'infinitesimo attuale.

Nota di G. Vivanti.

§ 1. — *Varie definizioni dell'infinitesimo.*

L'idea dell'infinitesimo nacque nella gran mente di Leibniz [1] quasi a complemento della sua *lex continuatis.* La legge di continuità, già nota prima di lui, e formulata dagli scolastici nel famoso adagio: *Natura non facit saltum*, divenne per esso uno dei cardini, non solo della filosofia, ma dell'intera scienza della natura [2], e le sue vedute luminose furono forse i primi germi delle teorie che oggi dominano quasi indiscusse il campo scientifico. Tutto ciò che esiste forma una serie continua, dove non v'hanno lacune nè interruzioni; i fenomeni naturali si svolgono in modo continuo senza angolosità, senza salti bruschi. Di fronte alla natura si trova l'uomo, portato dal suo impulso innato ad investigarne le leggi, a scoprirne i misteri; ma esso non ha a sua disposizione che due strumenti essenzialmente discontinui, il numero e la linea retta. Come dunque si potrà risolvere il grande problema, come si potrà studiare il continuo con mezzi discontinui?

Si ha, per esempio, una curva pienamente determinata; qual è la lunghezza dell'arco compreso fra due suoi punti?

Il metodo più naturale — quello degli antichi — è questo: si prende sulla curva una serie di punti abbastanza vicini e si congiungono fra loro con linee rette i punti contigui; la somma delle corde darà, *con una certa approssimazione,* la lunghezza della curva. E questa approssimazione potrà rendersi grande a piacere aumentando opportunamente il numero dei punti da prendersi sulla curva. Da questo all'invenzione del calcolo infinitesimale non v'era che un passo, ma un passo da gigante. Bisognava concludere così: Si avrà la lunghezza della curva con approssimazione infinita, cioè *con esattezza*, prendendo i punti a distanza infinitamente piccola fra loro. Era una conclusione ardita, perchè trasformava d'un tratto delle equazioni approssimate in equazioni esatte, o piuttosto sembrava togliere alla matematica la sua esattezza caratteristica per farne una scienza d'approssimazione. Fu appunto principalmente l'intento di preservare la matematica da questa temuta degenerazione e di mantenerla al suo rango di scienza esatta, che diede origine alle discussioni interminabili di cui furono oggetto i principî del calcolo. E poichè fu riconosciuto che i risultati finali forniti dal metodo infinitesimale erano effettivamente esatti ed identici a quelli ottenuti con altri metodi indiscutibilmente rigorosi, rimase da spiegare il come ed il perchè di tale curioso fenomeno. Molte

furono le soluzioni proposte, e queste variarono naturalmente a seconda del senso attribuito alla parola *infinitesimo*.

Non è qui il luogo di fare la storia dell'infinitesimo [3], il cui significato non era forse ben chiaro neppure nella mente del suo creatore [4]. Le diverse interpretazioni che ne furono date si riducono essenzialmente alle seguenti [5]:

a) L'infinitesimo è una quantità nulla (Eulero);

b) Esso è una quantità finita, variabile e tendente a zero (Carnot, Cauchy);

c) Esso è un ente di natura diversa dalle quantità ordinarie, una grandezza intensiva, priva d'estensione, che funge quale momento generatore delle quantità (Newton, Kant);

d) Esso è una quantità ordinaria tanto piccola, che ripetuta un numero finito qualsiasi di volte non forma mai una quantità finita assegnata (Poisson, Du Bois-Reymond).

La definizione *a*) non merita discussione, perchè sopra degli zeri assoluti non si può istituire alcun calcolo [6].

La definizione *b*) è del tutto sufficiente a giustificare l'esattezza dei risultati del calcolo infinitesimale. Riprendendo l'esempio poc'anzi citato, col dire che le corde divengono infinitesime noi *non abbiamo bisogno* d'intendere se non che esse decrescono oltre ogni limite. A nostro credere è anzi questo il modo più ovvio e più semplice d'interpretare il calcolo infinitesimale, il quale resta per tal guisa indipendente da ogni considerazione metafisica, e ci appare come una riproduzione del metodo d'esaustione degli antichi, identica ad esso nel concetto, ma perfezionata dal punto di vista dell'uniformità e della speditezza del meccanismo.

La definizione *c*) non può essere discussa se non nel campo filosofico; matematicamente parlando, purchè noi conserviamo agli incrementi dx, dy, dz,... le loro proprietà aritmetiche, possiamo attribuire ad essi quel significato che meglio ci piace [7].

La definizione *d*) è quella che formerà l'argomento principale del presente scritto.

§ 2. — *Concetto dell'infinitesimo attuale.*

Abbiamo già notato, e ci preme ripetere, come il calcolo infinitesimale possa svolgersi affatto indipendentemente dalla considerazione di grandezze non finite. Le quantità che si dicono infinitesime possono sempre riguardarsi come quantità variabili aventi per limite zero, quindi finite in ogni loro fase. L'infinitesimo così considerato può dirsi *potenziale*, in opposizione all'infinitesimo *attuale*, che sarebbe una quantità costante non finita, e che corrisponderebbe alla definizione *d*) del paragrafo precedente.

Ma l'infinitesimo attuale, bandito dal Calcolo, ricompare in altri campi della Matematica. Per esaminare la sua natura e la parte che esso ha in questa scienza, ci è d'uopo anzitutto definirlo esattamente.

Che cosa significa la parola *infinitesimo?*

Sia divisa l'unità in n parti; se m è un numero qualunque minore di n, m di quelle parti (m n-esimi) non basteranno a formare l'unità. Facciamo ora crescere n oltre ogni limite, sino a che divenga infinito; ciascuna parte dell'unità potrà dirsi un *infinitesimo*, e, se m è un numero finito qualunque, m di quelle parti non potranno mai formare l'unità. Si può adunque caratterizzare l'infinitesimo mediante questa proprietà, che *esso, ripetuto un numero finito qualsiasi di volte, non forma giammai l'unità* (oppure una quantità finita determinata qualunque). L'infinitesimo così definito ci appare come una quantità costante, della stessa natura di $^1/_2$, $^1/_3$, ..., $^1/_n$, ...; è cioè quell'*infinitesimo attuale* di cui vogliamo parlare.

E qui si presenta spontanea la domanda: Esiste l'infinitesimo attuale? Tale questione, benchè strettamente connessa con molti problemi filosofici, può esaurirsi completamente, come vedremo, coi soli mezzi fornitici dalla Matematica.

§ 3. — *Dimostrazione di Cantor della non esistenza dell'infinitesimo.*

Ci occorre anzitutto orientarci e vedere in quale campo dobbiamo cercare questo ente la cui esistenza abbiamo posto in discussione.

Tutti i segmenti che possono prendersi sopra una retta indefinita sono dell'una o dell'altra di queste due specie:

O si ha un segmento limitato da due punti A, B della retta (segmento AB);

O si ha un segmento costituito dalla porzione della retta posta a destra o a sinistra d'un punto O di essa (segmento $O\infty$ o ∞O).

La proprietà caratteristica d'ogni segmento della prima specie è questa, che, presa in qualsiasi modo una parte di esso, non si può mai farla coincidere col segmento primitivo. Invece, se si ha un segmento della seconda specie $O\infty$ e si prende su di esso un punto qualunque O', il segmento parziale $O'\infty$, può portarsi a coincidenza con $O\infty$.

I segmenti della prima specie si dicono *finiti,* quelli della seconda *infiniti* ([8]).

Preso un segmento finito come unità di misura, si può raffigurare l'andamento d'una variabile reale mediante il moto d'un punto sopra una retta, intendendo che ad ogni valore della variabile corrisponda la posizione del punto mobile la cui distanza da un punto fisso della

retta è data da quel valore. Allora, se esiste una grandezza infinitesima attuale, a questa corrisponderà una certa posizione del punto mobile; e la nostra questione sarà ridotta alla seguente:

Esiste un segmento tale, che, ripetuto un numero finito comunque grande di volte, non esaurisca mai un segmento finito assegnato?

G. Cantor ha risolto tale questione in senso negativo. Del come egli sia giunto a questa conclusione si trova un accenno breve e incompleto a pag. 50-51 del suo scritto poc'anzi citato; e noi lo traduciamo fedelmente:

« *Non possono esistere grandezze numeriche lineari* ζ *(ossia grandezze numeriche rappresentabili sotto forma di segmenti continui rettilinei limitati) diverse da zero e minori di qualunque grandezza numerica finita piccola a piacere, cioè grandezze di tal natura sono in contraddizione col concetto di grandezza numerica lineare.*

« L'andamento della mia dimostrazione è il seguente: io parto dalla *supposizione* d'una grandezza lineare ζ, tanto piccola che il suo n-plo $\zeta . n$ per *ogni numero intero finito arbitrariamente grande* n è minore dell'unità, e dimostro, partendo dal concetto di grandezza lineare e mediante certi teoremi della teoria dei numeri trasfiniti, che allora anche $\zeta . \nu$ è minore di *qualunque grandezza finita arbitrariamente piccola,* ν denotando un numero ordinale (cioè un numero o tipo d'un insieme ben ordinato) *trasfinito* grande a piacere e appartenente ad una classe di numeri elevata quanto si vuole. Ma ciò vuol dire, che ζ non può esser reso *finito mediante alcuna moltiplicazione attualmente infinita per quanto potente essa sia,* cioè che esso non può certo esser *elemento* di grandezze finite. Pertanto la supposizione fatta contraddice al concetto di grandezza lineare, secondo il quale ciascuna grandezza lineare può imaginarsi come parte integrante di altre grandezze, e in particolare di grandezze finite. Dunque non resta che da abbandonare l'ipotesi dell'esistenza d'una grandezza ζ minore di $\frac{1}{n}$ per ogni numero finito intero n, e con ciò il nostro teorema è dimostrato. »

Il concetto della dimostrazione di Cantor sembra essere questo. Dire che ζ è un segmento equivale ad ammettere che, disponendo successivamente sopra una retta una serie abbastanza grande di segmenti tutti eguali a ζ, si debba di necessità arrivare a coprire per intero un segmento finito assegnato; ora Cantor stabilisce (e qui v'ha una lacuna nella sua esposizione) che, se ciò non è possibile mediante una serie finita di segmenti, non lo è neppure mediante una serie infinita, comunque estesa essa sia.

§ 4. — *Nesso della nostra questione col postulato d'Archimede.*

La questione dell'esistenza dell'infinitesimo può essere considerata sotto un punto di vista un po' diverso.

Il postulato (9) 5° del 1° libro del trattato d'Archimede: *De sphaera et cylindro* stabilisce che, date due grandezze geometriche disuguali ad una, due, tre dimensioni, la loro differenza, ripetuta un numero abbastanza grande di volte, arriva a superare una qualunque delle due grandezze (10). Posto sotto forma più semplice, e limitato alle sole grandezze geometriche ad una dimensione, esso può enunciarsi così: Se a, b sono due segmenti qualunque, ed $a < b$, può sempre trovarsi un numero finito n tale che $a \, . \, n > b$.

Ora può chiedersi: Di quale natura è questa asserzione, e da che attinge essa la sua forza?

Per rispondere a tale domanda ci conviene premettere alcune considerazioni generali.

§ 5. — *Digressione.*

Gli oggetti, il cui studio forma l'argomento della Matematica, sono enti fittizi, creati dal nostro pensiero in modo perfettamente arbitrario, ed aventi quelle proprietà qualunque (purchè tra loro non contraddittorie) che ci piace d'attribuire ad essi. Però, siccome quella scienza è nata, al pari d'ogni altra, dalla osservazione della natura, gli enti matematici derivano in gran parte, ci sia permessa la frase, dalla *idealizzazione* di oggetti realmente esistenti (11); così, per esempio, un filo sottile fortemente teso e la superficie libera delle acque hanno dato probabilmente origine ai concetti di retta e di piano.

Sia pertanto E un ente matematico, che costituisca in qualche modo l'imagine ideale d'un oggetto reale E_1. Si tratta anzitutto di definire rigorosamente l'ente E; cioè di scegliere alcune *fra le più evidenti* proprietà di E_1, convenientemente *idealizzate*, e tali che bastino a distinguere il nostro ente da qualunque altro. La scelta di queste proprietà può generalmente farsi in più modi; stabilita però in un dato modo la definizione di E, tutte le altre sue proprietà devono potersi dimostrare in base a questa. Tali proprietà costituiscono altrettanti *assiomi* o *teoremi,* secondochè esse risultano in modo evidente dalla definizione di E o devono dedursi da essa mediante una più o meno lunga catena di raziocini. Insomma il gruppo G delle proprietà dell'ente E si scinde in tre sottogruppi D, A, T, di cui il primo contiene le proprietà che si sono scelte a formare la definizione di E, A gli assiomi,

T i teoremi. Ma, come si è osservato, la scelta del sottogruppo D può farsi in più modi differenti. Se D' è una definizione di E diversa da D, ad essa corrisponderà una nuova decomposizione di G in tre sottogruppi D', A', T'; ed avverrà che certi elementi di D faranno parte di A' o di T', mentre certi elementi di D' figureranno in A o in T. In altre parole, potrà accadere che una proprietà di E, la quale fa parte della definizione D di esso, costituisca invece un assioma o un teorema quando E s'intenda definito mediante il gruppo di proprietà D'.

La Matematica odierna, per la sua tendenza a generalizzare, ha rivolto l'attenzione anche ad enti il cui concetto non è derivato direttamente dall'osservazione di oggetti esistenti, le cui proprietà sono scelte in modo *completamente arbitrario* e senza la guida di considerazioni relative al mondo reale. Anche per tali enti, che potrebbero dirsi *convenzionali*, valgono in gran parte le riflessioni esposte poc'anzi.

§ 6. — *Il continuo e le sue definizioni.*

Uno di questi enti convenzionali è quello che Bettazzi ([12]) chiama *classe continua ad una dimensione* e Veronese ([13]) *continuo ordinario rettilineo* ([14]); noi per brevità lo diremo semplicemente *continuo*. Esso è un insieme di *grandezze ad una dimensione* ([15]) avente certe proprietà determinate. Fra queste Bettazzi sceglie le seguenti a costituire la definizione del continuo:

a) L'insieme considerato è una *classe propria* C ([16]);
b) C è *connessa* ([17]);
c) C è *chiusa* ([18]).

Definito così il continuo, si può dimostrare che per esso ha luogo il postulato d'Archimede ([19]).

Veronese definisce invece il continuo colle proprietà seguenti:

a) Esso è una *classe propria* C;
b) C è *illimitata* ([20]);
c) C è *chiusa;*
d) C gode della proprietà enunciata nel postulato d'Archimede ([21]).

Avviene qui dunque il fatto che si era segnalato in generale; la proprietà costituente il postulato d'Archimede figura nell'esposizione di Bettazzi come un teorema, mentre in quella di Veronese è una delle proprietà che servono a definire il continuo.

§ 7. — *L'insieme di tutti i segmenti finiti posti sopra una retta obbedisce al postulato d'Archimede.*

Torniamo infine al nostro argomento, e consideriamo l'insieme I di tutti i segmenti finiti ([22]) posti sopra una stessa retta ed aventi un estremo, p. es. quello di sinistra, comune. Definita nel modo ordinario l'addizione dei segmenti, è chiaro che il nostro insieme costituisce una classe propria di grandezze ad una dimensione. A caratterizzare completamente questo insieme dobbiamo prendere altre proprietà di esso, e dobbiamo sceglierle fra le più evidenti. Ora quali tra le proprietà dell'insieme considerato ci risultano come evidenti dal concetto intuitivo che abbiamo della linea retta?

A nostro avviso può ritenersi come evidente, che l'insieme I è *connesso* e *chiuso;* per modo che esso ha tutti i caratteri attribuiti da Bettazzi al *continuo.* Ne risulta (v. il § prec.) che nell'insieme I ha luogo il postulato d'Archimede; quindi anche per questa via siamo giunti alla conclusione, che non esiste un segmento rettilineo attualmente infinitesimo.

Quanto alla definizione di Veronese, mentre pel continuo come ente condizionale non v'ha alcuna ragione di preferenza fra essa e l'altra definizione sopra menzionata, nel caso particolare dell'insieme continuo I non ci sembra da adottarsi, perchè la proprietà *d* che ne fa parte non può considerarsi come evidente, — e ne è prova il fatto, che l'ipotesi opposta — l'esistenza dell'infinitesimo attuale — fu ed è tuttora ammessa da matematici e da filosofi ([23]).

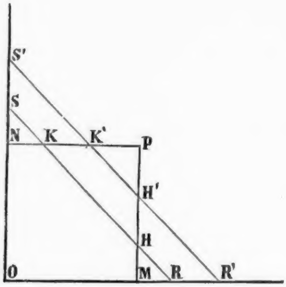
§ 8. — *Sulla teoria delle probabilità geometriche.*

V'ha una parte delle Matematiche, in cui sembrano presentarsi quantità infinitesime costanti; e da ciò vogliono i sostenitori dell'infinitesimo attuale trarre un argomento a favore della loro tesi. Ci sarà facile provare che anche qui, come nel Calcolo, si tratta soltanto di infinitesimi potenziali.

Intendiamo alludere alla teoria delle probabilità geometriche.

Per essere più chiari, prenderemo a considerare un problema semplicissimo. Si cerchi la probabilità che la somma di due rette prese ad arbitrio, ma minori l'una e l'altra d'una certa lunghezza a, sia minore d'un'altra lunghezza b. Naturalmente dev'essere $b < 2a$; supporremo inoltre, per fissare le idee, $b > a$. Se rappresentiamo ciascuna possibile coppia di lunghezze x, y mediante il punto d'un piano avente x, y

per coordinate ortogonali, i casi possibili saranno rappresentati da tutti i punti del quadrato OMPN di lato a, ed i casi favorevoli dalla parte di esso OMHKN posta a sinistra della retta RS che taglia su ciascuno



dei due assi una lunghezza b; quindi la probabilità cercata è $\frac{\mathrm{OMHKN}}{\mathrm{OMPN}}$. La probabilità che la somma delle due rette sia precisamente b è data da $\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{HK}}{\mathrm{OMPN}}$ ([24]); essa è, dicono, infinitamente piccola. Se invece di b si prende un'altra lunghezza b', pure maggiore di a, la probabilità che la somma considerata sia eguale a b' sarà $\pi' = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{H'K'}}{\mathrm{OMPN}}$; infinitesima pur essa, ma paragonabile con π, giacchè $\frac{\pi'}{\pi} = \frac{\mathrm{H'K'}}{\mathrm{HK}}$. Ecco dunque, secondo i difensori dell'infinitesimo, due quantità infinitamente piccole costanti π e π'; e la prova che esse non sono zeri assoluti è che hanno tra loro un rapporto finito e determinato.

Noi vediamo la cosa un po' diversamente. Anzitutto esaminiamo in qual modo si giunga ai risultati esposti. Ammesso che a e b abbiano una comune misura p, si comincia collo stabilire che i valori possibili di x e y sieno tutti e soltanto i multipli di $\frac{p}{n}$, dove n è un numero intero preso ad arbitrio; essi saranno rappresentati dagli $\left(\frac{an}{p}+1\right)^2$ vertici degli $\left(\frac{an}{p}\right)^2$ quadrati eguali in cui può dividersi OMPN, e di questi $(2a-b)\frac{n}{p}+1$ cadranno sul segmento HK. La probabilità che sia $x+y=b$ sarà dunque data da:

$$\pi_n = \frac{(2a - b)\dfrac{n}{p} + 1}{\left(\dfrac{an}{p} + 1\right)^2} .$$

Aumentiamo n indefinitamente; avremo:

$$\pi_\infty = \lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{n} \frac{(2a - b)p}{a^2} \right] ,$$

ossia $\pi_\infty = 0$. — Per un'altra lunghezza b', che supporremo divisibile esattamente per p, avremo:

$$\pi'_n = \frac{(2a - b')\dfrac{n}{p} + 1}{\left(\dfrac{an}{p} + 1\right)^2} ,$$

$$\pi'_\infty = \lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{n} \frac{(2a - b')p}{a^2} \right] = 0 ,$$

quindi:

$$\frac{\pi'_n}{\pi_n} = \frac{(2a - b')\dfrac{n}{p} + 1}{(2a - b)\dfrac{n}{p} + 1} , \qquad \frac{\pi'_\infty}{\pi_\infty} = \lim_{n=\infty} \frac{\pi'_n}{\pi_n} = \frac{2a - b'}{2a - b} .$$

In realtà dunque i pretesi infinitesimi attuali π_∞, π'_∞ non sono altro che quantità assolutamente nulle, le quali rappresentano i limiti degli infinitesimi potenziali π_n, π'_n; e il loro rapporto è semplicemente il limite, per $n = \infty$, del rapporto di questi due infinitesimi potenziali. L'esistenza di questo limite è un fatto perfettamente analogo all'esistenza del limite di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ossia della derivata $f'(x)$, per una funzione ordinaria $y = f(x)$; e come quest'ultimo, così anche l'altro fatto non ha alcun rapporto colla questione dell'esistenza dell'infinitesimo attuale.

Che poi il riguardare π_∞ e π'_∞ come misure di probabilità non abbia alcun senso, è cosa pressochè evidente. Lasciando da parte le obiezioni di massima che possono elevarsi contro il concetto di probabilità nei problemi in cui il numero dei casi possibili è infinito ([25]), osserveremo soltanto, come il risultato $\pi_\infty = 0$ (o $\pi_\infty =$ infinitesimo) non abbia e non possa avere altro significato se non che, qualunque sia il numero delle prove — numero il quale non può concepirsi altrimenti che finito — la *speranza teorica* di ottenere $x + y = b$ è assolutamente nulla. È quindi illusoria la distinzione tra il valore di π_∞ e quello di π'_∞. E

parimenti non v'ha luogo ad arrestarsi sulla circostanza che π_∞ e π'_∞ hanno un rapporto assegnabile. Infatti essa non permette di concludere, potere equamente scommettersi $2a - b$ contro $2a - b'$ che si verificherà il caso $x + y = b$ anzichè il caso $x + y = b'$; giacchè, lo ripetiamo, in un numero finito qualsiasi di prove non può ragionevolmente attendersi nè l'uno nè l'altro avvenimento ([26]).

In conclusione, anche dalla teoria delle probabilità non può trarsi alcun argomento in appoggio all'esistenza dell'infinitesimo attuale.

§ 9. — *Di alcuni argomenti filosofici in difesa dell'infinitesimo.*

Come si era annunciato, una discussione puramente matematica ci ha condotti alla risoluzione completa del problema propostoci. Non sarà inutile tuttavia accennare brevissimamente al lato filosofico della questione, la quale ha stretti rapporti con altri problemi importantissimi, fra cui quello della natura dell'infinito, e quello della costituzione del continuo. Tali problemi sono fra i primi che abbiano occupato le menti dei filosofi ([27]), e sarebbe assai interessante rintracciarne la storia attraverso l'antichità e il medio evo; ma noi dobbiamo limitarci a parlarne solo in quanto essi si collegano col nostro argomento.

Si ammette da molti, che l'esistenza dell'infinito porti come conseguenza quella dell'infinitesimo. Se si può dividere l'unità in un numero attualmente infinito di parti, ciascuna di queste, si dice, sarà attualmente infinitesima. Ma di qual natura saranno queste parti? Più precisamente, se imaginiamo diviso un segmento finito in un numero infinito di parti, ciascuna di queste sarà un punto od un segmento? Qui tornano al pensiero tutti gli argomenti accumulati dalla filosofia d'ogni tempo ([28]) contro la possibilità che il continuo sia costituito di punti. Du Bois-Reymond ([29]), riproducendone alcuni sotto forma un po' diversa, arriva necessariamente alla conclusione che l'infinitesimo attuale esiste. Noi non sappiamo attribuire gran valore a tali argomenti, i quali si riducono in sostanza alla impossibilità nostra di concepire la retta come formata di punti. Ci sembra anzi che la stessa impossibilità sussista pel segmento infinitesimo, con questo di più, che essendo tale segmento a sua volta decomponibile in segmenti infinitesimi più piccoli, esso non ha il carattere di elemento, e quindi la sua introduzione non fa che spostare, lasciandolo irresoluto, il problema della costituzione del continuo. Aggiungeremo ancora che, se si considerano i corpi come costituiti di punti materiali e si applica ad essi quel processo d'idealizzazione di cui abbiamo già parlato, s'ottiene precisamente il continuo matematico avente come elemento il punto geometrico.

§ 10. — *L'infinitesimo e i numeri trasfiniti.*

L'argomento a favore dell'esistenza dell'infinitesimo poc'anzi accennato trova apparentemente un appoggio nella teoria dei numeri trasfiniti di G. Cantor ([30]). Questa teoria ha posto in luce come anche l'infinito attuale ammetta delle gradazioni, come esistano degli infiniti superiori ad altri infiniti. Di qui nasce il seguente ragionamento: Se i, i_1 denotano due infiniti differenti, e se si designa con $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{i_1}$ rispettivamente una delle i e delle i_1 parti eguali in cui s'imagina successivamente divisa l'unità, $\frac{1}{i}$ e $\frac{1}{i_1}$ saranno pure differenti; ora ciò non sarebbe possibile se esse si riducessero ambedue a semplici punti.

Noi possiamo far vedere, che questa osservazione è priva di fondamento.

Gl'infiniti i, i_1 non sono altro che i *numeri ordinali* corrispondenti alle due serie ben ordinate di parti in cui fu successivamente divisa l'unità; ora, ammesso che queste parti sieno veramente segmenti e non punti, le due serie avranno, per un teorema noto ([31]), la prima potenza, sicchè i ed i_1 saranno due numeri trasfiniti della seconda classe. Ne segue, che l'insieme dei segmenti di lunghezza $\frac{1}{i}$ e l'insieme di quelli di lunghezza $\frac{1}{i_1}$ potranno farsi corrispondere elemento ad elemento, e poichè i segmenti di ciascun insieme sono per supposto tutti eguali fra loro, ogni segmento del primo insieme sarà eguale ad ogni segmento del secondo. Adunque non è vero che $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{i_1}$ sieno tra loro differenti; e con ciò cade l'obiezione, la quale ha pur essa il suo fondamento nella petizione di principio ([32]) consistente nell'attribuire all'infinito tutte le proprietà del finito.

E poichè abbiamo parlato dei numeri trasfiniti, gioverà ricordare, essere questi unicamente *numeri ordinali*, e non potere rappresentare stati d'una variabile reale. Nel campo d'esistenza d'una variabile reale positiva non v'ha che una sola grandezza infinita, quella cioè che rappresenta il limite superiore di tutti i valori finiti della variabile.

parimenti non v'ha luogo ad arrestarsi sulla circostanza che π_∞ e π'_∞ hanno un rapporto assegnabile. Infatti essa non permette di concludere, potere equamente scommettersi $2a - b$ contro $2a - b'$ che si verificherà il caso $x + y = b$ anzichè il caso $x + y = b'$; giacchè, lo ripetiamo, in un numero finito qualsiasi di prove non può ragionevolmente attendersi nè l'uno nè l'altro avvenimento ([26]).

In conclusione, anche dalla teoria delle probabilità non può trarsi alcun argomento in appoggio all'esistenza dell'infinitesimo attuale.

§ 9. — *Di alcuni argomenti filosofici in difesa dell'infinitesimo.*

Come si era annunciato, una discussione puramente matematica ci ha condotti alla risoluzione completa del problema propostoci. Non sarà inutile tuttavia accennare brevissimamente al lato filosofico della questione, la quale ha stretti rapporti con altri problemi importantissimi, fra cui quello della natura dell'infinito, e quello della costituzione del continuo. Tali problemi sono fra i primi che abbiano occupato le menti dei filosofi ([27]), e sarebbe assai interessante rintracciarne la storia attraverso l'antichità e il medio evo; ma noi dobbiamo limitarci a parlarne solo in quanto essi si collegano col nostro argomento.

Si ammette da molti, che l'esistenza dell'infinito porti come conseguenza quella dell'infinitesimo. Se si può dividere l'unità in un numero attualmente infinito di parti, ciascuna di queste, si dice, sarà attualmente infinitesima. Ma di qual natura saranno queste parti? Più precisamente, se imaginiamo diviso un segmento finito in un numero infinito di parti, ciascuna di queste sarà un punto od un segmento? Qui tornano al pensiero tutti gli argomenti accumulati dalla filosofia d'ogni tempo ([28]) contro la possibilità che il continuo sia costituito di punti. Du Bois-Reymond ([29]), riproducendone alcuni sotto forma un po' diversa, arriva necessariamente alla conclusione che l'infinitesimo attuale esiste. Noi non sappiamo attribuire gran valore a tali argomenti, i quali si riducono in sostanza alla impossibilità nostra di concepire la retta come formata di punti. Ci sembra anzi che la stessa impossibilità sussista pel segmento infinitesimo, con questo di più, che essendo tale segmento a sua volta decomponibile in segmenti infinitesimi più piccoli, esso non ha il carattere di elemento, e quindi la sua introduzione non fa che spostare, lasciandolo irresoluto, il problema della costituzione del continuo. Aggiungeremo ancora che, se si considerano i corpi come costituiti di punti materiali e si applica ad essi quel processo d'idealizzazione di cui abbiamo già parlato, s'ottiene precisamente il continuo matematico avente come elemento il punto geometrico.

§ 10. — *L'infinitesimo e i numeri trasfiniti.*

L'argomento a favore dell'esistenza dell'infinitesimo poc'anzi accennato trova apparentemente un appoggio nella teoria dei numeri trasfiniti di G. Cantor [30]. Questa teoria ha posto in luce come anche l'infinito attuale ammetta delle gradazioni, come esistano degli infiniti superiori ad altri infiniti. Di qui nasce il seguente ragionamento: Se i, i_1 denotano due infiniti differenti, e se si designa con $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{i_1}$ rispettivamente una delle i e delle i_1 parti eguali in cui s'imagina successivamente divisa l'unità, $\frac{1}{i}$ e $\frac{1}{i_1}$ saranno pure differenti; ora ciò non sarebbe possibile se esse si riducessero ambedue a semplici punti.

Noi possiamo far vedere, che questa osservazione è priva di fondamento.

Gl'infiniti i, i_1 non sono altro che i *numeri ordinali* corrispondenti alle due serie ben ordinate di parti in cui fu successivamente divisa l'unità; ora, ammesso che queste parti sieno veramente segmenti e non punti, le due serie avranno, per un teorema noto [31], la prima potenza, sicchè i ed i_1 saranno due numeri trasfiniti della seconda classe. Ne segue, che l'insieme dei segmenti di lunghezza $\frac{1}{i}$ e l'insieme di quelli di lunghezza $\frac{1}{i_1}$ potranno farsi corrispondere elemento ad elemento, e poichè i segmenti di ciascun insieme sono per supposto tutti eguali fra loro, ogni segmento del primo insieme sarà eguale ad ogni segmento del secondo. Adunque non è vero che $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{i_1}$ sieno tra loro differenti; e con ciò cade l'obiezione, la quale ha pur essa il suo fondamento nella petizione di principio [32] consistente nell'attribuire all'infinito tutte le proprietà del finito.

E poichè abbiamo parlato dei numeri trasfiniti, gioverà ricordare, essere questi unicamente *numeri ordinali*, e non potere rappresentare stati d'una variabile reale. Nel campo d'esistenza d'una variabile reale positiva non v'ha che una sola grandezza infinita, quella cioè che rappresenta il limite superiore di tutti i valori finiti della variabile.

§ 11. — *Riassunto.*

Ecco pertanto le conclusioni a cui siamo giunti:

1. Il calcolo infinitesimale non ha bisogno che delle sole quantità finite;

2. Il campo d'esistenza d'una variabile reale positiva consta unicamente di quantità finite, ad eccezione di due sole, 0 e ∞, e l'infinitesimo attuale, come grandezza estensiva, cioè rappresentabile mediante un segmento, non esiste;

3. Nessuna prova in favore dell'esistenza dell'infinitesimo può trarsi dalla teoria delle probabilità geometriche, nè da quella dei numeri trasfiniti.

§ 12. — *Appendice.*

Ma se l'infinitesimo attuale non esiste, come abbiamo ormai stabilito, nel campo delle quantità reali, non è escluso che in altri campi pur essi soggetti al dominio delle Matematiche possano definirsi enti dotati di proprietà analoghe a quelle degl'infinitesimi. Benchè tali enti sieno estranei all'argomento propostoci, non parrà, speriamo, del tutto inopportuno il dirne qualche cosa.

Abbiamo già accennato che cosa s'intenda per grandezza in generale, e per classe di grandezze ad una dimensione; ed aggiungiamo ora che la grandezza:

$$S(\underset{1.}{A}, \underset{2}{A}, \underset{3.}{A}, \ldots, \underset{m^a}{A})$$

si dice m-upla della grandezza A. Se prendiamo a considerare le grandezze più generali, la definizione già data di *finito,* la quale si basa essenzialmente sul concetto reale di quantità, non ha più alcun significato. Non potendo però conservare il valore assoluto della parola *finito,* tentiamo di mantenere almeno il valore relativo delle tre parole *finito, infinitesimo, infinito.* A tal uopo, essendo data una classe di grandezze ad una dimensione, e convenendo di riguardare come finita una grandezza determinata A, occorre stabilire un criterio per decidere quali grandezze della classe debbano *rispetto ad A* chiamarsi finite, quali infinitesime, quali infinite: e conviene scegliere tali criteri per modo che il senso di queste parole si scosti il meno possibile da quello che esse hanno nella teoria delle quantità ordinarie.

Chiameremo *finita* rispetto ad A ogni grandezza B tale che possano trovarsi due multipli successivi di A fra cui sia compreso un multiplo assegnato di B;

infinitesima ogni grandezza C di cui tutti i multipli sono minori di A;

infinita ogni grandezza maggiore di tutti i multipli di A.

Si dimostra senza alcuna difficoltà, che una grandezza infinitesima (o infinita) rispetto ad A lo è parimenti rispetto a qualunque altra grandezza finita rispetto ad A. Se dunque esistono effettivamente nella classe considerata grandezze della natura di B, C, D, la classe resterà divisa in tre sottoclassi β, γ, δ contenenti rispettivamente le grandezze finite, infinitesime e infinite.

Può avvenire che nella sottoclasse γ vi sieno grandezze i cui multipli arrivino a superare qualunque grandezza di γ_1 ed altre di natura opposta; allora, se γ_1 è l'insieme delle prime, γ_2 quello delle seconde, queste saranno infinitesime rispetto a quelle di γ_1 considerate come finite, epperò potranno dirsi infinitesime di 2° ordine rispetto ad A, mentre le grandezze di γ_1 si diranno infinitesime di 1° ordine.

Può ripetersi lo stesso ragionamento rispetto a γ_2, e così di seguito; parimenti δ può sottoporsi ad una scomposizione analoga. Si avranno così infinitesimi ed infiniti di vari ordini [33].

Esempi di grandezze di tal natura furono proposti da Du Bois-Reymond, da Thomae e da Stolz.

Du Bois-Reymond [34] considera tutte le possibili funzioni d'una variabile x che al crescere indefinito di x sono positive e indefinitamente crescenti, e fa corrispondere a ciascuna di esse un ente, che egli chiama *l'infinito della funzione,* e che per comodità denoteremo, per una funzione $f(x)$, con $\mathrm{I}\,[f(x)]$. Per definizione si ha $\mathrm{I}\,[f(x)] \gtreqless \mathrm{I}\,[\varphi(x)]$ secondochè $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ tende ad un limite infinito, finito o nullo; quindi gli enti testè definiti sono grandezze ad una dimensione. L'addizione è definita dalla relazione seguente:

$$\mathrm{I}\,[f(x)] + \mathrm{I}\,[\varphi(x)] = \mathrm{I}\,[f(x)\,\varphi(x)].$$

La classe di grandezze studiata da Thomae [35] non è che una parte di quella più ampia di Du Bois-Reymond. Thomae considera le serie seguenti di funzioni, dove μ prende tutti i valori reali e positivi:

$$\ldots,\ (\lg\lg x)^{\mu},\ (\lg x)^{\mu},\ x^{\mu},\ (e^{x})^{\mu},\ (e^{e^{x}})^{\mu},\ \ldots$$

La classe di grandezze:

$$\ldots,\ \mathrm{I}\,[(\lg\lg x)^{\mu}],\ \mathrm{I}\,[(\lg x)^{\mu}],\ \mathrm{I}\,[x^{\mu}],\ \mathrm{I}\,[(e^{x})^{\mu}],\ \mathrm{I}\,[(e^{e^{x}})^{\mu}],\ \ldots$$

è appunto della natura di quelle di cui parlammo poc'anzi. Prendiamo come punto di partenza la grandezza $\mathrm{I}\,[x]$, che riguardiamo come fi-

nita; le grandezze della sottoclasse $\mathrm{I}[x^\mu]$ saranno parimenti finite, quelle delle sottoclassi $\mathrm{I}[(\lg x)^\mu]$, $[(\lg\lg x)^\mu]$, ... saranno infinitesime di 1°, 2°, ... ordine; quelle delle sottoclassi $\mathrm{I}[(e^x)^\mu]$, $\mathrm{I}\left[\left(e^{e^x}\right)^\mu\right]$, ... saranno infinite di 1°, 2°, ... ordine.

Stolz [36] considera un insieme di funzioni $f(x)$ le quali tendono al limite $+0$ mentre x decrescendo s'avvicina ad un valore a, e ad ogni funzione f fa corrispondere un ente $u(f)$, da lui detto *momento* della funzione f. Egli stabilisce poi le seguenti definizioni:

$$u(f) \gtreqless u(\varphi) \quad \text{secondochè} \quad \lim_{x=a} \frac{f}{\varphi} \gtreqless 1\,,$$

$$u(f+\varphi) = u(f) + u(\varphi)\,, \quad u(f \cdot \varphi) = u(f) \cdot u(\varphi)\,.$$

I momenti sono grandezze ad una dimensione, e nella classe da essi costituita non ha luogo il postulato d'Archimede. Infatti, se $\lim\limits_{x=a} \dfrac{f}{\varphi} = 0$, sarà $u(f) < u(\varphi)$, e, poichè anche $\lim\limits_{x=a} \dfrac{nf}{\varphi} = 0$ per ogni valore finito di n, sarà $u(nf) = n \cdot u(f) < u(\varphi)$.

Si può estendere la classe di grandezze considerata aggiungendovi nuove grandezze $\dfrac{u(f)}{u(f_1)}$ definite, sotto la condizione $\lim\limits_{x=a} \dfrac{f}{f_1} > 0$, dalla eguaglianza:

$$u(f_1) \cdot \frac{u(f)}{u(f_1)} = u(f)\,. \tag{α}$$

Le condizioni d'eguaglianza e diseguaglianza di queste grandezze sono determinate dalla relazione:

$$\frac{u(f)}{u(f_1)} \gtreqless \frac{u(f_2)}{u(f_3)} \quad \text{secondochè} \quad u(f) \cdot u(f_3) \gtreqless u(f_1) \cdot u(f_2)\,,$$

$$\text{ossia secondochè} \quad \lim_{x=a} \frac{ff_3}{f_1 f_2} \gtreqless 1\,.$$

Se f, f_1, g sono tre qualunque delle funzioni considerate, e se $\lim\limits_{x=a} \dfrac{f}{f_1} > 0$, sarà $\lim \dfrac{f}{f_1 g} = \infty$, donde segue $u(f) > u(f_1 g)$, ossia $u(f) > u(f_1) \cdot u(g)$; questa relazione può scriversi in virtù della (α):

$$u(f_1) \cdot \frac{u(f)}{u(f_1)} > u(f_1) \cdot u(g)\,,$$

e di qui si ha infine $\dfrac{u(f)}{u(f_1)} > u(g)$. Quindi qualunque rapporto di momenti è maggiore di qualunque momento.

Quando $\lim\limits_{x=a} \dfrac{f}{f_1}$ è una quantità finita λ, possiamo porre $\dfrac{u(f)}{u(f_1)} = \lambda$; se inoltre $\lim\limits_{x=a} \dfrac{g}{g_1} = \infty$, sarà $\lim \dfrac{f_1 g}{f g_1} = \infty$, quindi $\dfrac{u(g)}{u(g_1)} > \dfrac{u(f)}{u(f_1)}$.

La classe di grandezze da noi considerata consta adunque:

a) Delle quantità reali e positive (grandezze finite);

b) Dei momenti (grandezze infinitesime);

c) Dei rapporti di momenti $\dfrac{u(g)}{u(g_1)}$ per $\lim\limits_{x=a} \dfrac{g}{g_1} = \infty$ (grandezze infinite).

Un altro sistema di grandezze studiate da Stolz è, come egli stesso osserva, identico in sostanza con quello di Du Bois-Reymond.

Mantova, 24 marzo 1891.

NOTE

(1) Anche l'invenzione del Calcolo infinitesimale ha avuto, come ogni altra, i suoi precursori; ma la gloria d'aver fatto dell'infinitesimo, considerato come una rappresentazione *infinitamente approssimata* della realtà, un istrumento potente ed universale spetta incontestabilmente a Leibniz.

(2) Il Marchese de l'Hospital scriveva a Leibniz: « Il y a encore un autre « principe dont on vous est redevable, et dont je conviens avec vous, et « qui est d'une utilité merveilleuse pour resoudre plusieurs questions tant « physiques que mathématiques, c'est que la nature n'agit point *per sal-* « *tum...* » (*Leibnizens math. Schriften herausgegeben von* Gerhardt, t. II, p. 303-4). E Leibniz stesso scriveva a Giov. Bernoulli a proposito di questo principio: « ..... quod primus forte observavi ..... et *legem continuitatis* « voco ..... » (op. cit., t. III, p. 541).

(3) Si possono consultare, fra le altre, le seguenti opere: Mansion, *Esquisse de l'histoire du calcul infinitésimal,* Gand 1886; Cohen, *Das Princip der Infinitesimal - Methode und seine Geschichte,* Berlin 1883. V. anche: Du Bois-Reymond, *Die allgemeine Functionentheorie,* Tübingen 1882, § 28.

(4) Mansion scrive (op. cit., p. 28): « Il existe relativement à Leibniz « une tradition inexacte, d'après laquelle il aurait admis l'existence des « pseudo-infiniment petits (quantità infinitesime costanti)..... En réalité, « Leibniz a employé, comme la plupart de ses contemporains, le langage « conventionnel de la méthode des indivisibles, mais en l'interprétant dans « le sens de la méthode des indéfiniment petits ». Alle citazioni recate in appoggio di questo asserto se ne possono contrapporre moltissime altre, da cui risulta, che Leibniz ammetteva l'esistenza degli infinitamente piccoli

almeno come enti matematici, che anzi li riguardava come il fondamento vero della sua analisi, ma che — per mostrare come essa si reggesse indipendentemente da ogni discussione filosofica — insisteva sul fatto, potersi essa svolgere anche considerando gl'infinitesimi come quantità finite indefinitamente decrescenti, per modo che la nuova analisi si riduceva in sostanza al metodo d'Archimede. V. p. es., op. cit., t. III, p. 288; t. IV, p. 91-92, 218; t. V, p. 322, 327-28, 350; t. VI, p. 150-51.

Che poi Leibniz, pur propendendo a ritenere come non esistenti nella natura reale le grandezze infinitesime, non avesse una convinzione decisa in argomento, risulta dai seguenti passi delle sue opere: t. III, p. 499, 516, 551; t. IV, p. 63, 110. Infine sembra che Leibniz abbia pure concepito il differenziale come una grandezza intensiva, cioè di natura diversa dalle grandezze (estensive) di cui esso è l'elemento, il principio generatore. — V. Cohen, op. cit.

([5]) Non ci pare esatta l'asserzione seguente di Stolz (*Die unendlich kleinen Grössen*, Ber. des naturw. med. Vereins in Innsbruck, t. XIV): « Dass die quantitates infinitesimae von den extensiven Grössen, bezie- « hungsweise von den diese darstellenden reellen Zahlen wesentlich ver- « schieden seien, wird von allen ihren Anhängern zugegeben ». Lo stesso Leibniz (V. la nota prec.) parla sovente dell'infinitesimo come d'una quantità ordinaria. E passando ad uno degli ultimi sostenitori dell'infinitesimo, il Du Bois-Reymond, ecco che cosa egli scrive: ..... die Einheitsstrecke in « unendlich viele Theilstrecken zerfällt, von denen keine endlich ist. Also « existirt das Unendlichkleine wirklich » (op. cit., p. 72). « Wie hat man « das Unendlichkleine sich zu denken?..... Natürlich hat man es so sich « vorzustellen, wie es vor unseren Augen entstanden ist: nämlich, sofern « wir die Länge als Vertreterin der Grösse beibehalten, als Theilstrecke, « also gleich dem Endlichen, als Strecke » (p. 74-5). « Wenn man die « (positiv gedachte) Veränderliche x gegen die Null abnehmen lässt, wie « dies bei Grenzbetrachtungen vorgeschrieben wird, und man denkt sich x « erst alle Stufen der Grössen endlicher Abmessung, wenn man will, jede « Stufe durch Unendlichkleines vermehrt oder vermindert, sodann auch alle « Stufen des Unendlichkleinen aller Ordnungen durchlaufend, so hat x das « positive Grössengebiet erschöpft » (p. 80).

([6]) I rapporti di quantità nulle considerati da Eulero (v. le sue *Institutiones calculi differentialis*) non sono altro che limiti di rapporti di quantità variabili tendenti a zero.

([7]) V. Cohen, op. cit. Cfr. le teorie di Du Bois-Reymond, Thomae, Stolz di cui parleremo in fine.

([8]) V. Cantor, *Zur Lehre vom Transfiniten*, gesammelte Abhandlungen aus der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, Halle-Saale 1890, p. 61; Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig 1888, § 5.

([9]) λαμβανόμενον, cosa che si assume come vera, equivale nel senso a *postulato*, che etimologicamente corrisponde piuttosto ad *αἴτημα*. Non bisogna poi confondere i λαμβανόμενα con quelli che posteriormente vennero

chiamati *lemmi*, e che sono teoremi ausiliari di cui, per non interrompere il filo della esposizione, si omette o si rimanda ad altro punto la dimostrazione.

(10) Questo postulato trovasi ancora, per le sole aree, nell'altra opera d'Archimede: *De quadratura parabolae*, dove è detto che esso era noto anche a geometri anteriori, fra cui Eudoxo da Cnido. L'importanza del postulato d'Archimede fu posta in luce da Stolz; vegg. le sue Memorie: *Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung*, Math. Ann., t. XVIII, p. 255, e *Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes*, Math. Ann., t. XXII, p. 504.

(11) Riguardo all'origine ed alla natura degli enti matematici può vedersi: Kroman, *Unsere Naturerkenntniss*, trad. tedesca di Fischer-Benzon, Kopenhagen 1883, p. 16-17, 135, 172, 184.

(12) *Teoria delle grandezze*, Pisa 1890.

(13) *Il continuo rettilineo e l'assioma V d'Archimede*, Mem. della R. Acc. dei Lincei, serie 4ª, vol. VI.

(14) Prima di essi G. Cantor (*Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig 1883) e Stolz (Memorie citate e *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, I Th., Leipzig 1885) si erano occupati della definizione matematica del continuo; ma, poichè le loro ricerche hanno servito di base a quelle posteriori e si sono in qualche modo compenetrate in esse, stimiamo inutile tenerne parola in particolare.

Per rendere più spedita l'esposizione, faremo uso della nomenclatura adottata da Bettazzi, spiegandone di mano in mano il significato nelle note. Per maggiori dettagli rimandiamo alla Memoria di Bettazzi e ad un'estesa recensione che ne abbiamo pubblicato nel *Bull. des Sc. Math.* Marzo 1891.

(15) *Grandezza* è, secondo Grassmann, ogni ente d'un insieme tale, che di due suoi elementi qualsiasi può stabilirsi se sieno *eguali* ($=$) o *diseguali* ($\neq$), qualunque sia il senso che si attribuisce a queste due parole, purchè sieno soddisfatte le due condizioni seguenti:

Se $A = B$, $B = A$;

Se $A = B$ e $B = C$, $A = C$;

e inoltre la condizione $A = A$.

Le grandezze sono poi *ad una dimensione*, se di due grandezze diseguali qualunque può stabilirsi quale sia *maggiore* ($>$) e quale *minore* ($<$), qualunque sia il senso di quelle parole, purchè abbiano luogo le seguenti relazioni:

Se $A > B$ e $A' = A$, $B' = B$, allora $A' > B'$;

Se $A > B$, $B < A$;

Se $A > B$ e $B > C$, $A > C$;

Se $A > B$, $S(A, C) > S(B, C)$.

Qui S è simbolo d'un'operazione (*addizione*) univoca, commutativa, associativa, e avente le seguenti proprietà:

Se $B = C$, $S(A, B) = S(A, C)$;

Se $B \neq C$, $S(A, C) \neq S(A, C)$.

S(A, B) dicesi la *risultante* di A e B. Se D denota l'operazione (*sottrazione*) inversa di S, cioè definita dalla relazione $A = S(D(A, B), B)$, D(A, B) dicesi la *divergenza* di A e B.

([16]) Se un insieme di grandezze è tale che, essendo A, B due suoi elementi qualunque, anche S(A, B) appartiene ad esso, si dice che quell'insieme costituisce una *classe;* questa è *propria* se contiene pure D(A, B).

([17]) Si dividano le grandezze d'una classe propria ad una dimensione Γ in due gruppi Π_1, Π_2 tali che, se P è un elemento di Π_1 (o di Π_2), appartenga a Π_1 (o a Π_2) ogni grandezza di Γ minore (o maggiore) di P. Può avvenire che Π_1 abbia o non abbia una grandezza massima, e che Π_2 abbia o non abbia una grandezza minima; di qui 4 casi, nel 1° dei quali si dice che ha luogo una *successione*, nel 2° e nel 3° un *collegamento*, nel 4° uno *spezzamento*. In quest'ultimo caso si ha in particolare una *sezione* od un *salto*, secondochè la divergenza fra le grandezze di Π_2 e quelle di Π_1 diviene o no minore di qualunque grandezza della classe.

Una classe propria in cui qualunque scomposizione dà luogo a collegamenti o a sezioni dicesi *connessa*.

([18]) Se una sottoclasse Δ d'una classe Γ può scomporsi in due gruppi Π_1, Π_2 formanti una sezione, e se nella classe Γ v'hanno grandezze maggiori di tutte quelle di Π_1 e minori di tutte quelle di Π_2, si dice che queste grandezze *riempiono* la sezione. Se per ogni sezione di qualunque possibile sottoclasse d'una classe Γ esistono nella classe grandezze che la riempiono, la classe Γ si dice *chiusa*.

([19]) Omettiamo la dimostrazione, che può leggersi nella Mem. di Bettazzi.

([20]) Cioè non ha grandezza minima.

([21]) L'equivalenza delle due definizioni si dimostra immediatamente, osservando (v. Bettazzi, Mem. cit., §§ 50-52) che ogni classe propria illimitata che soddisfa al postulato d'Archimede è connessa, e reciprocamente.

([22]) *Finito* è detto qui nel senso di *non infinito*.

([23]) Per lo scopo del presente scritto sarebbe bastato esporre la definizione di Bettazzi e mostrare come le proprietà che essa assume come caratteristiche pel continuo possano intuitivamente riscontrarsi nell'insieme di segmenti da noi considerato. Abbiamo tuttavia creduto opportuno porre di fronte a quella definizione l'altra emessa recentemente da Veronese, ed indicare i motivi per cui nel nostro caso ci atteniamo piuttosto all'una che all'altra di esse.

([24]) Cfr. Czuber, *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte*, Leipzig 1884; Giudice, *Sopra una questione di probabilità trattata recentemente dal Prof. Murer*, Periodico di Matematica, t. V, p. 73.

([25]) V. una nostra Nota nel fascicolo d'aprile della *Rivista*.

([26]) Cfr. Frattini, *Intorno al significato di alcune questioni di probabilità*, Periodico di Matematica, t. V, p. 72.

([27]) V. Zeller, *Die Philosophie der Griechen;* Tannery, *Histoire du concept de l'infini au VI siècle av. J. C.*, Revue philosophique, dic. 1882; Tannery, *Le concept scientifique du continu: Zénon d'Élée et Georg Cantor*, Revue philosophique, ott. 1885; G. Cantor, opere citate.

(28) V. oltre le opere e memorie citate nella nota precedente: Gutberlet, *Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet,* Mainz 1878. Vedi pure a proposito della questione dell'infinito: Gutberlet, *Das Problem des Unendlichen,* Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, t. LXXXVIII, p. 179.

(29) *Die allg. Functionentheorie,* § 21.

(30) Riservandoci di esporre in altro articolo i principii di questa interessantissima teoria, ci permettiamo di rimandare per ora il lettore alle Memorie originali di Cantor. Veggasi pure il § I dei nostri *Fondamenti della teoria dei tipi ordinati* (Annali di Matematica, t. XVII).

(31) Cantor, *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten,* Math. Ann., t. XXI, p. 54; Acta Math., t. II, p. 376.

(32) V. Cantor, *Grundl. einer allg. Mannichfaltigkeitslehre,* § 4; *Zur Lehre vom Transfiniten,* p. 3.

(33) Cfr. Bettazzi, mem. cit.

(34) *Ueber die Paradoxen des Infinitärcalculs,* Math. Ann., t. XI, p. 146; *Die allg. Functionentheorie,* § 69. V. anche Bettazzi, Mem. cit. *passim.*

(35) *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen,* Halle 1870; *Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen,* Halle 1880.

(36) V. la Mem. già citata: *Die unendlich kleinen Grössen,* e le *Vorlesungen üb. allg. Arithm.*; inoltre: *Ueber zwei Arten von unendlich kleinen und von unendlich grossen Grössen,* Math. Ann., t. XXXI, p. 601.

NB. Mentre stiamo correggendo le bozze di stampa, riceviamo, gentilmente inviatoci dall'autore, un discorso pronunziato dal prof. Stolz il 2 marzo 1891, dal titolo: *Grössen und Zahlen* (Leipzig, Teubner, 1891). Citiamo in particolare le pagg. 13-16, perchè esse si riferiscono più propriamente all'argomento del presente articolo.

Questione IV.

In un piano sono date n rette a_1, a_2..., a_n. Determinare graficamente la posizione di un punto P per il quale si abbia

$$\rho_1 p_1^2 + \rho_2 p_2^2 \ldots\ldots + \rho_n p_n^2 = minimum$$

essendo p_1, p_2..... p_n le distanze del punto P dalle rette date e ρ_1, ρ_2..... ρ_n coefficienti assegnati (1).

N. Jadanza.

(1) Si desidera una soluzione diversa da quella data dal Bertot che trovasi nei *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* Paris, 1876.

Corrispondenza.

Per evitare nei lettori ogni pericolo di equivoco nel vedere la *dichiarazione* che segue, e per impedire ogni dubbio sulla cortesia, che è uno dei doveri del Direttore d'una rivista, devo avvertire che, appena ricevuto dal prof. Segre il manoscritto del suo lavoro, pubblicato in questo volume a pag. 42 e segg., gli comunicai, come d'abitudine, il mio giudizio, che in seguito pubblicai nelle prime linee delle mie osservazioni (pag. 66), avvertendolo in pari tempo che in alcuni punti la mia opinione differiva dalla sua, e specialmente dal fatto d'aver egli proposto (nota a pag. 60) a risolversi una questione senza citare gli autori che già l'avevano sostanzialmente risolta. E poichè egli non credette fare modificazioni, io, dietro suo invito, feci seguire il suo lavoro dalle mie osservazioni.

Appena ricevuta, e non senza meraviglia, la dichiarazione che segue, credetti ancora mio dovere d'invitare l'A. a sopprimere quello che credeva meno necessario, avvertendolo di quali risposte erano suscettibili alcune sue frasi. Ma, aderendo al suo desiderio, la sua dichiarazione viene pubblicata integralmente, affinchè il lettore possa farsi idea esatta delle ragioni che egli adduce.

C. Segre. — *Una dichiarazione.*

Alle *Osservazioni del Direttore*, pubblicate di seguito al mio articolo (pag. 42-66 di questo volume), non avrei forse replicato, sia per l'avversione istintiva che io ho per le polemiche (che in certi casi reputo non solo inutili, ma dannose), sia perchè già troppo a lungo io avevo discorso delle mie idee nella *Rivista*, e d'altronde dopo le parole del Direttore io non avrei avuto che da ripetere senza modificazioni di sorta quanto già nei paragrafi da lui citati (VI e VIII) avevo detto (1). Ma una circostanza vi è

(1) Al lettore che voglia prendersi la briga di confrontare le cose da me esposte in quell'articolo con le osservazioni del Direttore non è forse inutile di far rilevare che per quanto riguarda la geometria degl'iperspazi il Prof. Peano esamina uno solo fra i punti di vista di cui io ho parlato, e che, anche rimanendo in quello, le varie geometrie (geometria *della retta, piana, solida*, ecc.) hanno per lui un significato diverso da quello usuale (come risulta dalle sue definizioni). Similmente la frase che una proposizione *cessa di valere*, o *non sussiste più*, ecc., può trarre in inganno chi non badi bene al senso che egli le attribuisce.

Riguardo poi a quel passo delle osservazioni del Direttore che si trova a metà della pag. 67 non posso tacere che, come non so fino a qual punto, *trattandosi di matematica*, si possa parlare di ipotesi contrarie all'esperienza, così non intendo come vi possano essere delle *teorie meravigliose*

che non mi permette di tacere. Il Prof. Peano (a pag. 67) dice che *trova strano* (son le sue parole) *che in giornali autorevoli, e trattandosi di matematica purissima, sia scritta* una certa frase. Ora poichè il Professore Peano dopo averla riportata non ne indica la fonte, io ci tengo a dichiarare ai lettori della *Rivista* che quella frase è mia e che quindi ne assumo tutta la responsabilità. Essa si trova in un lavoro che porta per titolo: *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques*, e che è stato pubblicato nel vol. 34 dei *Mathematische Annalen* (cfr. la nota alla fine della pag. 14). Tant'è: la Redazione di quell'autorevole giornale ha accettato e pubblica continuamente lavori importanti in cui si trovano ben altre cose contrarie alle vedute esposte dal Professore Peano che quella che io ivi dicevo e che ancora mi pare innocentissima!..... Si trattava di questo: che non avendo io altro modo di risolvere un'importante questione che di ricorrere ad una formola generale data poco prima da un altro geometra, credevo però dovere di *onestà* (cfr. il mio articolo, pag. 55) di avvertire che la dimostrazione ingegnosa (conseguenza diretta del principio dell'invariabilità del numero, cfr. pag. 54) di quella formola mi pareva potesse lasciare il dubbio che vi fosse qualche eccezione.....

Ora il Direttore della *Rivista* non ammette che in un caso simile si possa considerare il risultato come veramente *ottenuto:* ed in sostanza la stessa cosa avevo detto io nel mio articolo (§ VI), esprimendo ripetutamente il concetto che l'ideale del matematico non è raggiunto finchè non s'è conseguito una precisione ed un rigore completi. Ma dove noi differiamo è nelle conseguenze che ne tragghiamo. Egli stupisce che una cosa siffatta si pubblichi, e giunge fino ad augurarsi di poter *ben convincere i giovani suoi colleghi di questa verità, che i lavori in cui fa difetto il rigore non possono far avanzare d'un passo la matematica.* Io invece credevo (e su ciò mi basavo nei consigli relativi alle investigazioni geometriche dati in quel paragrafo — del resto con molta cautela, come il lettore può verificare) che in tutti i rami della matematica, nell'aritmetica come nell'analisi infinitesimale, nella geometria come nella meccanica teoretica, il periodo di *scoperta* avesse nella maggior parte dei casi preceduto quello del *rigore* (come appunto accade continuamente ai singoli ricercatori); e che tutta una moltitudine di cognizioni a cui così si era giunti per vie non perfettamente rigorose non solo avessero fatto *avanzare di qualche passo* la matematica, ma avessero anzi costituito una gran parte dei materiali con cui essa s'è fatta, e sui quali *poi* si è proceduto, e finora *solo in una parte di essa*, al lavoro critico atto a renderla assolutamente rigorosa (¹). Io

---

atte a far rammaricare che l'autore non abbia applicato il suo ragionamento ad ipotesi pratiche! Per me, se una teoria è *meravigliosa*, e però raggiunge lo scopo supremo della scienza: *l'onore dell'intelletto umano*, io non oso chieder altro.

(¹) Attualmente questo lavorio di critica, di perfezionamento logico, che è desiderabile di vedere in ogni più minuta cosa, per molte teorie non si

credevo che si potessero citare innumerevoli lavori, di grandi geometri e di grandi analisti, i quali sono stati veramente fondamentali nella scienza, quantunque, ahimè! i loro risultati ammettessero delle eccezioni avvertite solo più tardi, o non fossero conseguenza puramente logica di premesse tutte enunciate esplicitamente. Ma il Direttore della *Rivista* dice che risultati siffatti sono *falsi*, o che procedendo a quel modo *si potrà fare della poesia, ma non della matematica* (pag. 67). O certo è poesia, ma nel più alto significato della parola, quella che si trova nei grandi scienziati a cui alludevo! Ma è pur matematica! Matematica in un senso largo, elevato, che preferisce attenersi al massimo eclettismo anzi che ad esclusioni atte solo a rimpicciolire gl'ideali scientifici; in un senso che permette di apprezzare tanto le audacie di quei grandi ingegni che nella foga della ricerca si preoccupano più di dar idee nuove e feconde e di abbozzare teorie originali, che di fare dimostrazioni complete e di escludere ogni caso d'eccezione, quanto la pazienza mirabile e l'acume critico di quegli altri ingegni che completano l'opera dei primi rendendola pienamente rigorosa e logica in ogni parte!

Torino, Aprile 1891.

Risposta.

1. Le mie *Osservazioni* (pag. 66 di questo volume) contengono sulla teoria dei così detti *iperspazii* una serie di affermazioni (dalla pag. 67 alla 69). Nessuna di esse vien dal Prof. Segre contraddetta. Quindi questa questione è finita.

2. Ma l'*avversione istintiva* ch'egli dice di avere per le polemiche si riferisce solo alle scientifiche, poichè egli non esita, specialmente nella nota 1, nell'addurre argomenti e termini extrascientifici. Io passerò oltre a questi, nè discuterò quelli; basti uno:

Io scrissi:

Se si distingue la geometria in piana e solida secondochè....., avremo fatto una semplice distinzione didattica..... Ma se per geometria della retta intendiamo quella che..... avremo fatto una distinzione scientifica.

è ancora in grado di farlo. Si dovrà per questa ragione trascurarle? — D'altronde non si può nemmeno dire che in ricerche siffatte vi sia deficienza di logica. Spesso la questione si riduce tutta ad alcuni *principî* matematici ai quali si giunge con ragionamenti *per ora* incompleti (come alle leggi da cui parte la fisica matematica si giunge, almeno in molti casi, per via d'esperienze), ma dai quali poi si traggono le varie teorie mediante deduzioni perfettamente logiche. Si considerino, ad esempio, i meravigliosi risultati a cui pervenne RIEMANN grazie al principio di DIRICHLET, quantunque la dimostrazione che egli dava di questo principio fosse tanto incompleta! Vedansi anche i principî della *geometria numerativa* accennati a pag. 54.

A queste parole precise egli replica:

Le varie geometrie hanno per lui un significato diverso da quello usuale.

Io ritengo la polemica scientifica una delle forme sotto cui si possono esprimere, alcuna volta utilmente, delle idee. Io stesso debbo ad alcune polemiche l'aver stretta amicizia col momentaneo avversario, che prima non conosceva. Ma affinchè la polemica non sia *inutile e dannosa* è necessario che essa si mantenga strettamente scientifica.

3. Se io ho parlato solo del terzo punto di vista, sugli iperspazii, esposto dal Segre, si è perchè a quello solo io muovo l'obbiezione. Ma egli dice *che io esamino uno solo fra i punti di vista di cui egli ha parlato;* come se io non lo avessi espressamente dichiarato, riportando (pag. 67, linee 26-27) le sue testuali parole (pag. 60, linea ultima). Queste parole possono parere un invito a parlare anche di altri; ed io l'accetto, parlando del primo.

a) Se si chiama punto un gruppo qualunque di n variabili (pag. 59), allora è ben noto che cessa ogni discussione sui postulati di Geometria; le teorie che si deducono sviluppano le conseguenze dei principii di aritmetica, e non di quelli della geometria; ogni risultato così ottenuto è indipendente da qualsiasi postulato geometrico.

b) In conseguenza, per questa via, l'affermare che si ha *un grande vantaggio a cercare in uno spazio superiore applicazioni allo spazio ordinario* (affermazione che, nel terzo punto di vista, come dicono e il buon senso e la logica rigorosa, è un assurdo), significa che *da relazioni fra più numeri si possono utilmente dedurre delle relazioni fra tre;* e questa è una trita verità, identica a quest'altra: *È utile il sillogismo, nel quale, da relazioni fra tre termini si deduce una relazione fra due.*

c) Per questa via si fa ancora della Matematica? Certo che si fa dell'Algebra se si ragiona bene; ma alcuni autori trattano *usualmente* queste questioni contravvenendo alle regole algebriche.

d) Così un autore (1), nella prima pagina dell'esposizione di questo metodo, dall'ipotesi che

« si possano attribuire a ciascun elemento (d'uno spazio ad m dimensioni) i valori numerici di m quantità, in modo che, senza alcuna eccezione ad ogni gruppo arbitrario di valori di queste corrisponda un solo elemento di quello spazio e viceversa..... »

deduce come conseguenza che

« ogni elemento di questo, senza eccezioni, sarà individuato dai rapporti mutui di $m+1$ coordinate omogenee, e servirà viceversa a individuare questi loro rapporti..., fatta eccezione pel caso in cui tutte le coordinate omogenee date sono eguali a 0, oppure eguali ad ∞ ».

Ora quali sono i mutui rapporti delle 6 quantità $(0, 0, 1, 2, \infty, \infty)$, o i loro rapporti alla prima o all'ultima di esse, quantunque esse non siano

(1) C. SEGRE, *Studio sulle quadriche* (Mem. R. Acc. di Torino, serie II, t. XXXVI, pag. 15).

tutte eguali a 0, nè eguali ad ∞? Del resto è noto che non c'è l'identità fra il sistema di m numeri, ed i rapporti fra $m+1$, sia che colla parola *numero* si comprenda o si escluda l'infinito, sia che si comprendano o si escludano i casi in cui le $m+1$ quantità di cui si considerano i rapporti siano eguali a 0 o eguali ad ∞; e che nessuno dei due sistemi considerati dall'A. è quello di cui si serve la geometria proiettiva. Questi varii sistemi sono solo all'incirca identici.

e) Nella stessa pagina l'A. scrive:

« In uno spazio lineare ad m dimensioni è chiaro, che a determinare ogni elemento si potranno prendere invece delle $m+1$ coordinate omogenee, altre $m+1$ quantità che siano proporzionali a date funzioni lineari omogenee indipendenti da quelle coordinate, poichè date quelle $m+1$ quantità saranno pure determinate in modo unico le $m+1$ coordinate omogenee o meglio i loro rapporti. »

Quindi egli afferma che esprime una quantità la scrittura $0 \times \infty - \infty + 2\infty$. Anche qui bisogna modificare le ipotesi; la proposizione è prossima alla verità, ma sta ancora nella classe degli errori; e ben si vede dove si possa arrivare con questo metodo. Parlo naturalmente nel campo scientifico, e non in quello pratico.

6. Rimane la questione del rigore. Io parlai su questo soggetto solamente come Direttore della *Rivista*, collo scopo di tenerne fermo l'indirizzo; chè altrimenti non ho nè l'età, nè l'esperienza, nè l'autorità necessarie, nè la voglia di discutere una questione di metodo. Ma ad alcune opinioni del Segre è necessario contrapporre le mie.

Così io non ho mai visto in alcun *ramo della matematica, dall'aritmetica alla meccanica teoretica, che un periodo di scoperta preceda quello del rigore.* Un teorema, in matematica, è scoperto quando è dimostrato. Il progresso della matematica consiste sempre nell'aggiungere nuove verità alle antiche. Nemmeno questi due periodi si presentano successivamente ai singoli ricercatori; c'è invece il *periodo di ricerca* che precede l'*istante della scoperta.*

E se il prof. Segre credeva si potessero citare *innumerevoli* lavori, i cui risultati *ammettessero delle eccezioni avvertite solo più tardi,* io so di poterne citare mille volte mille *innumerevoli,* i cui risultati non ammettono eccezioni, nè finora avvertite, nè che potranno essere avvertite *mai.* Qui sta la matematica; ed è appunto il rigore con cui i sommi matematici esposero le loro scoperte che ne costituì la fama, che sempre dura, e durerà quanto il mondo lontana.

È vero che nei numerosi volumi, per es. di Lagrange e di Cauchy, si trovarono delle inesattezze. Ma anche questi sommi erano uomini, e quindi fallibili. Del resto la differenza fra i sommi e gli infimi matematici sta in questo che i primi dicono moltissime cose giuste e rarissime false; i secondi invece dicono meno verità e più errori. Nel primo caso gli uni e gli altri fanno progredire la matematica, nel secondo no. Ma essi hanno tutti di comune l'intenzione di dire, a seconda delle proprie forze, delle verità.

E credo nuovo nella storia della matematica il fatto di autori che nelle loro ricerche, scientemente usano proposizioni a cui essi conoscono delle eccezioni, o che sanno non dimostrate; e che invece di seguire i matematici passati negli innumerevoli punti in cui fecero bene, prendano per modello i rari punti in cui trovansi in difetto.

G. PEANO.

RECENSIONI

Dott. Enrico DE AMICIS — *Introduzione alla teoria matematica della propagazione del calore.* — (Torino, Loescher, 1891).

Nella breve prefazione l'A. avverte che alla pubblicazione di questo lavoro lo ha principalmente determinato il pensiero che esso possa riuscire di qualche aiuto agli studenti della Facoltà di Fisica e Matematica; e specialmente per questo riguardo ci sembra che il lavoro meriti di esser ricordato.

Nella prima parte l'A., partendo dal noto principio di Lamè, stabilisce l'espressione generale del *flusso di calore* attraverso a un elemento qualunque di un corpo (non omogeneo, nè isotropo), e viene perciò condotto all'integrazione relativa a una mezza sfera. I limiti di questi integrali essendo rappresentati da funzioni discontinue, l'A. trova opportuno di esporre con una certa diffusione alcuni teoremi e risultati assai noti di Analisi che però, data l'indole del lavoro, possono trovarvi posto assai bene.

Nella seconda parte l'A., seguendo presso a poco, come appare anche dalle frequenti citazioni, l'esposizione del chiar. prof. Betti, determina le equazioni fondamentali che regolano la propagazione del calore e, dimostrata l'unicità della funzione da esse individuata, passa a trovare le trasformate di quelle equazioni per un cambiamento di variabili. La questione dell'integrazione non è affatto trattata.

L'esposizione ci sembra in generale chiara e rigorosa. Facciamo solo alcune osservazioni. Per esempio, dalla sola espressione analitica del principio di Lamè

$$dQ = F(r,\ \theta,\ \varphi)(V_1 - V_1')\, d\pi\, d\pi'\, dt$$

e dal fatto che fra due punti ad ugual temperatura si ammette nullo lo scambio di calore non risulterebbe che F è sempre finita.

Così pure (pag. 37-38) nel teorema dello stato stazionario si potrà dire, *praticamente*, che dopo un certo tempo la temperatura si sarà distribuita in uno stato stazionario, ma analiticamente si ha solamente che la temperatura *tende* verso uno stato stazionario; giacchè i ragionamenti fatti per la dimostrazione del teorema non richiedono che da un certo tempo in poi $\frac{dV}{dt}$ sia zero, ma solo che tenda convenientemente nello zero.

Del resto, a parte queste osservazioni di poco momento, ci pare che la lettura di questo lavoro possa essere utile a chi voglia intraprendere lo studio di questa parte della Fisica Matematica.

A. Campetti.

G. Lazzeri ed A. Bassani — *Elementi di Geometria.*

Gli *Elementi di Geometria* dei prof. Lazzeri e Bassani, recentemente pubblicati [1], meritano lode sincera per l'ordine, il rigore e la chiarezza con cui vi sono trattate le diverse teorie ed anche per l'accurata composizione tipografica e per la nitidezza delle figure. Lo studio contemporaneo della Geometria piana e solida, praticatovi, par che realmente giovi sia per migliorare o semplificare dimostrazioni ed anche intere teorie, sia per scolpire i varii concetti in modo più completo ed esatto nelle menti degli scolari. Formano, essi *Elementi*, un volume di 455 pag. in-8, diviso in *cinque libri.* Ad ogni libro seguono molti *esercizi*, 71 al primo, 237 al secondo, 311 al terzo, 235 al quarto, 227 al quinto, 1081 complessivamente.

Il *primo libro* è diviso in *cinque capitoli.* Il primo capitolo contiene le definizioni ed i postulati relativi a retta e piano: con un postulato viene ammessa l'esistenza d'una linea, retta, tale che, se una figura la contenga e roti intorno a due punti della medesima, tutti e solamente i punti d'essa linea restino immobili; così vien subito stabilito che basti fissare tre punti d'una figura non situati in linea retta per render fissa la figura. Il secondo capitolo pone definizioni e postulati relativi a segmenti, angoli e diedri e tratta dell'addizione e della sottrazione dei medesimi. Il terzo contiene le prime nozioni su circolo e sfera. Il quarto tratta di rette e piani paralleli. L'ultimo capitolo tratta di rette e piani perpendicolari e contiene le definizioni e le principali proposizioni relative alle figure simmetriche.

Il *secondo libro* è diviso in *quattro capitoli.* Il primo capitolo tratta dei poligoni; il secondo degli angoloidi; il terzo dei poliedri; il quarto delle distanze.

Il *terzo libro* è diviso in *sei capitoli.* Il primo tratta delle rette e dei piani, seganti e tangenti al circolo ed alla sfera, considera gli angoli nel circolo e le diverse posizioni relative di due circoli nel piano e di due sfere nello spazio, insegna a costruire la quinta parte del piatto. Il secondo capitolo s'occupa dei circoli e delle sfere, passanti per punti o tangenti a rette od a piani, e costruisce i poligoni ed i poliedri elementari regolari. Il terzo capitolo tratta dei sistemi di circoli e di sfere, considera particolarmente fasci e connessi di circoli e di sfere, e complessi di sfere. Il quarto capitolo tratta dell'omotetia diretta, affine ed inversa. Il capitolo quinto è dedicato alla sfera, studia gli angoli ed i poligoni sferici e stabilisce per i poligoni sferici e per i circoli della sfera alcune delle nozioni già stabilite per i

---

[1] Tipografia R. Giusti. Livorno, 1891.

poligoni e per i circoli nel piano. Il capitolo sesto si occupa del cono e del cilindro.

Il *quarto libro* è diviso in *sette capitoli*. Il primo tratta dell'equivalenza in generale; il secondo tratta dell'equivalenza di poligoni e di superficie poliedriche; il terzo tratta l'equivalenza di poligoni sferici e di piramidi sferiche; il quarto capitolo s'occupa dell'equivalenza di prismi; il quinto contiene la teoria dei limiti; il sesto s'occupa dell'equivalenza di poliedri; il settimo è dedicato all'equivalenza del circolo, del cilindro, del cono, della sfera e del toro.

Il *quinto libro* è diviso in *quattro capitoli*. Il primo capitolo tratta dei rapporti e delle proporzioni in generale, della proporzionalità di segmenti, di superficie e di solidi; il secondo s'occupa delle figure simili; il terzo della misura; il quarto contiene parecchie applicazioni dell'algebra alla geometria, piana e solida.

Dopo d'aver accennato rapidamente agli argomenti contenuti nel libro, credo opportuno di fare alcune osservazioni. Ben fecero gli autori ad introdurre i concetti di superficie e di linee complete: però sarebbe forse stato utile, per evitare falsi preconcetti, dire una parola sulla connessione delle superficie; almeno parlando del toro si sarebbe potuto far rilevare che la circonferenza, linea completa perchè basta da sola a dividere p. es. piano e superficie sferica che sono superficie complete, non basta da sola a dividere la superficie del toro. A pag. 34, dal postulato: « Quando una figura si muove nello spazio, in modo che un piano scorra su sè stesso lungo una sua retta a, ogni punto della figura si muove sopra una retta parallela alla retta a » è dedotto il corollario: « Da un punto non si può condurre più d'una retta parallela ad una retta data »; ciò richiede discussione, diversa da quella che trovasi nel libro, perchè se un piano scorre su sè stesso lungo una retta a parallela ad altre due b e b' dello stesso piano concorrenti in A, dal postulato segue solamente che A deve muoversi o sopra b o sopra b' o sopra un'altra retta passante per A e parallela ad a e che, se A percorre b, b' devesi trasportare con A: la teoria delle parallele, Euclidea, potrebbe p. es. anche fondarsi sull'ipotesi che in ogni piano il quale scorra su se stesso lungo un asse esista almeno una retta distinta dall'asse la quale scorra su se stessa; tuttavia l'aver conservato il postulato Euclideo anche coloro che pur si sono occupati dei vari modi in cui potrebbe venir presentata la teoria delle parallele ([1]), parmi una prova almeno molto forte della convenienza di non mutar grandemente la primitiva forma del postulato d'Euclide. A pag. 253 son dette di seconda specie le classi di grandezze tali che di due grandezze della classe l'una sia sempre maggiore, equivalente o minore dell'altra, e la somma di due grandezze della classe non goda della proprietà commutativa; tuttavia si parla poi della differenza, invece che delle differenze, di due grandezze della classe; quando sia

$$A + B \not= B + A$$

([1]) V. p. es. R. Baltzer, *Planimetria*. — R. De Paolis, *Elementi di Geometria*.

Del resto, a parte queste osservazioni di poco momento, ci pare che la lettura di questo lavoro possa essere utile a chi voglia intraprendere lo studio di questa parte della Fisica Matematica.

A. Campetti.

G. Lazzeri ed A. Bassani — *Elementi di Geometria.*

Gli *Elementi di Geometria* dei prof. Lazzeri e Bassani, recentemente pubblicati (¹), meritano lode sincera per l'ordine, il rigore e la chiarezza con cui vi sono trattate le diverse teorie ed anche per l'accurata composizione tipografica e per la nitidezza delle figure. Lo studio contemporaneo della Geometria piana e solida, praticatovi, par che realmente giovi sia per migliorare o semplificare dimostrazioni ed anche intere teorie, sia per scolpire i varii concetti in modo più completo ed esatto nelle menti degli scolari. Formano, essi *Elementi*, un volume di 455 pag. in-8, diviso in *cinque libri*. Ad ogni libro seguono molti *esercizi*, 71 al primo, 237 al secondo, 311 al terzo, 235 al quarto, 227 al quinto, 1081 complessivamente.

Il *primo libro* è diviso in *cinque capitoli*. Il primo capitolo contiene le definizioni ed i postulati relativi a retta e piano: con un postulato viene ammessa l'esistenza d'una linea, retta, tale che, se una figura la contenga e roti intorno a due punti della medesima, tutti e solamente i punti d'essa linea restino immobili; così vien subito stabilito che basti fissare tre punti d'una figura non situati in linea retta per render fissa la figura. Il secondo capitolo pone definizioni e postulati relativi a segmenti, angoli e diedri e tratta dell'addizione e della sottrazione dei medesimi. Il terzo contiene le prime nozioni su circolo e sfera. Il quarto tratta di rette e piani paralleli. L'ultimo capitolo tratta di rette e piani perpendicolari e contiene le definizioni e le principali proposizioni relative alle figure simmetriche.

Il *secondo libro* è diviso in *quattro capitoli*. Il primo capitolo tratta dei poligoni; il secondo degli angoloidi; il terzo dei poliedri; il quarto delle distanze.

Il *terzo libro* è diviso in *sei capitoli*. Il primo tratta delle rette e dei piani, seganti e tangenti al circolo ed alla sfera, considera gli angoli nel circolo e le diverse posizioni relative di due circoli nel piano e di due sfere nello spazio, insegna a costruire la quinta parte del piatto. Il secondo capitolo s'occupa dei circoli e delle sfere, passanti per punti o tangenti a rette od a piani, e costruisce i poligoni ed i poliedri elementari regolari. Il terzo capitolo tratta dei sistemi di circoli e di sfere, considera particolarmente fasci e connessi di circoli e di sfere, e complessi di sfere. Il quarto capitolo tratta dell'omotetia diretta, affine ed inversa. Il capitolo quinto è dedicato alla sfera, studia gli angoli ed i poligoni sferici e stabilisce per i poligoni sferici e per i circoli della sfera alcune delle nozioni già stabilite per i

---

(¹) Tipografia R. Giusti. Livorno, 1891.

poligoni e per i circoli nel piano. Il capitolo sesto si occupa del cono e del cilindro.

Il *quarto libro* è diviso in *sette capitoli*. Il primo tratta dell'equivalenza in generale; il secondo tratta dell'equivalenza di poligoni e di superficie poliedriche; il terzo tratta l'equivalenza di poligoni sferici e di piramidi sferiche; il quarto capitolo s'occupa dell'equivalenza di prismi; il quinto contiene la teoria dei limiti; il sesto s'occupa dell'equivalenza di poliedri; il settimo è dedicato all'equivalenza del circolo, del cilindro, del cono, della sfera e del toro.

Il *quinto libro* è diviso in *quattro capitoli*. Il primo capitolo tratta dei rapporti e delle proporzioni in generale, della proporzionalità di segmenti, di superficie e di solidi; il secondo s'occupa delle figure simili; il terzo della misura; il quarto contiene parecchie applicazioni dell'algebra alla geometria, piana e solida.

Dopo d'aver accennato rapidamente agli argomenti contenuti nel libro, credo opportuno di fare alcune osservazioni. Ben fecero gli autori ad introdurre i concetti di superficie e di linee complete: però sarebbe forse stato utile, per evitare falsi preconcetti, dire una parola sulla connessione delle superficie; almeno parlando del toro si sarebbe potuto far rilevare che la circonferenza, linea completa perchè basta da sola a dividere p. es. piano e superficie sferica che sono superficie complete, non basta da sola a dividere la superficie del toro. A pag. 34, dal postulato: « Quando una figura si muove nello spazio, in modo che un piano scorra su sè stesso lungo una sua retta a, ogni punto della figura si muove sopra una retta parallela alla retta a » è dedotto il corollario: « Da un punto non si può condurre più d'una retta parallela ad una retta data »; ciò richiede discussione, diversa da quella che trovasi nel libro, perchè se un piano scorre su sè stesso lungo una retta a parallela ad altre due b e b' dello stesso piano concorrenti in A, dal postulato segue solamente che A deve muoversi o sopra b o sopra b' o sopra un'altra retta passante per A e parallela ad a e che, se A percorre b, b' devesi trasportare con A: la teoria delle parallele, Euclidea, potrebbe p. es. anche fondarsi sull'ipotesi che in ogni piano il quale scorra su se stesso lungo un asse esista almeno una retta distinta dall'asse la quale scorra su se stessa; tuttavia l'aver conservato il postulato Euclideo anche coloro che pur si sono occupati dei vari modi in cui potrebbe venir presentata la teoria delle parallele [1], parmi una prova almeno molto forte della convenienza di non mutar grandemente la primitiva forma del postulato d'Euclide. A pag. 253 son dette di seconda specie le classi di grandezze tali che di due grandezze della classe l'una sia sempre maggiore, equivalente o minore dell'altra, e la somma di due grandezze della classe non goda della proprietà commutativa; tuttavia si parla poi della differenza, invece che delle differenze, di due grandezze della classe; quando sia

$$A + B \mathrel{=\!\!\!|\!\!\!=} B + A$$

[1] V. p. es. R. Baltzer, *Planimetria*. — R. De Paolis, *Elementi di Geometria*.

viene immediata l'idea che possa essere

$$(A + B) - B \mathrel{=\!\!|\!\!=} (B + A) - B$$

per cui è almeno necessario uno schiarimento. A pag. 264 è detto che i poligoni piani non intrecciati formano una classe di grandezze di seconda specie; ma questo significa includere l'idea della forma delle figure nello studio dell'equivalenza e ciò complica la teoria, la quale, a parte questa osservazione di poca importanza, è trattata molto bene: ci sarebbe p. es. contraddizione con la definizione di differenza data a pag. 253 dove dovrebbe dire *una*, non *la*, differenza, perchè ancora due grandezze di prima specie avrebbero infinite differenze.

Finalmente voglio dire poche cose, non speciali per gli *Elementi* di cui ci occupiamo, sulle definizioni; in quelle relative ai corpi rotondi p. es. non si riscontra che un adattamento artificioso a ragionamenti fatti, cosicchè lo scolaro potrebbe anche non riconoscervi quegli enti dei quali prima aveva un concetto chiaro, per quanto intuitivo. Le definizioni dovrebbero esser tratte dai concetti comuni e formulate semplicemente, per quanto è possibile: i ragionamenti con cui si stabiliranno le proposizioni relative ad un ente, anche se pieni d'artifici, non potranno oscurar l'ente stesso, quando il medesimo sia messo nettamente e semplicemente in evidenza. Le definizioni debbono esser formulate almeno in modo che nessuna parte sia totalmente superflua. A pag. 181 p. es. sono definiti i poliedri regolari così: « Un poliedro si chiama regolare, se tutte le sue facce sono poligoni regolari eguali, e tutti i suoi angoloidi sono pure eguali e regolari »; bastava dire p. es. che ha facce ed angoloidi regolari, e se tutto questo occorresse avrei taciuto perchè molto facilmente avrebbe ognuno riconosciuto il superfluo; ma bastava dire soltanto che ha facce regolari eguali, essendo dimostrato che: « Dans un polyèdre convexe, dont toutes les faces sont « invariables, les coins compris entre les faces, ou, ce qui revient au « même, les inclinaisons sur les différentes arêtes sont aussi invariables: « en sorte qu'avec les mêmes faces, on ne peut construire qu'un second « polyèdre convexe symétrique du premier » (1). Bisognava quindi o limitare, come fu detto, la definizione od evitare l'inconveniente mettendola sotto un diverso aspetto, perchè così com'è porta certamente gli scolari, quelli intelligenti, a ritenere, erroneamente, che nessuna delle due condizioni enunciate possa venir soppressa totalmente (2).

Palermo, maggio 1891. FRANCESCO GIUDICE.

---

(1) A. CAUCHY, *Journal de l'école polytechnique*, tome IX, cahier seizième, pag. 96.

(2) A questo proposito vedasi pure questa stessa *Rivista di Matematica*, pag. 20.

Exposition de la théorie des intégrateurs, par M. G. De Longchamps, professeur de mathématiques au lycée Saint-Louis, à Paris.

On sait que le but principal des instruments intégrateurs c'est l'évaluation des aires des surfaces plaines.

Parmi ces instruments le planimètre polaire d'Amsler est le plus appelé à l'emploi le plus fréquent.

Donc, M. Longchamps, dans le travail qui vient de paraître sous le titre indiqué ci-dessus, s'occupe particulièrement du planimètre polaire d'Amsler. Après avoir posé l'idée sur laquelle repose la théorie de ce planimètre (1) (celle des autres prend pour base des principes analogues) il déduit des formules qui donnent toute la théorie du planimètre polaire.

En suite il considère les cas particuliers qu'on peut se présenter. Le premier cas qu'il examine c'est quand l'aire de la courbe considérée est complètement extérieure au cercle polaire, et alors il démontre que l'aire cherchée s'obtient en multipliant le chemin enregistré par la roulette par le rayon r de la tige AS. Il examine ensuite deux autres cas: le cercle polaire coupant la courbe polaire et même lui enveloppant complètement.

Le raisonnement que M. Longchamps a suivi pour ramener ces deux cas au premier, est très-intéressant, et simplifie notablement la théorie du planimètre. Dans ces deux cas l'aire cherchée est exprimée par la formule

$$Zr + \mathrm{H},$$

H désignant une constante que M. Longchamps a retrouvé par valeur

$$\mathrm{H} = \pi (\mathrm{R}^2 + r^2 - 2r\rho)$$

telle que l'a donnée Amsler (2).

Connue la constante H, M. De Longchamps enonce le théorème suivant, en faisant connaître donc toute la théorie des planimètres.

Théorème. — *Lorsque le cercle polaire ne laisse pas la courbe donnée complètement en dehors de lui, l'aire s'obtient en multipliant le chemin enregistré par la roulette par* r, *puis en ajoutant à ce produit la constante* H.

---

(1) Reduit à son expression théorique le planimètre se compose de deux tiges rigides AP et AS, articulées en A; la première pivote autour d'un point fixe P, de telle sorte que l'articulation A, décrit toujours un cercle de centre P et de rayon PA. L'autre tige AS porte: 1° à son extrémité une pointe ou *style* S; 2° en un point R une roue qui est mobile dans un plan perpendiculaire à la tige. D'après cela, on comprend déjà que si la tige AS est mobile sur son prolongement, la roue R éprouve un *mouvement de glissement,* sans influence sur la rotation.

(2) *Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebenen Figuren, insbesondere über einen neuen Planimeter von Jakob Amsler,* 1856.

En terminant le compte rendu de cette petite mais remarquable note, nous sommes heureux de rendre ici un hommage public à M. De Longchamps, le savant professeur qui a donné tous ses soins depuis si longtemps aux études des sciences mathématiques.

Lisbonne, Juin 1891.

RODOLPHE GUIMARAES
Officier du Génie à Portugal.

Dr ERNST SCHRÖDER. — *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*Exacte Logik*). I Bd. Leipzig, Teubner, 1890. — II Bd. Erste Abtheilung, 1891.

Il primo volume della vasta opera intrapresa dallo Schröder contiene 718 pagine. E si può prevedere che, colla prossima comparsa del secondo volume, si avrà un'opera che conterrà quanto si è detto e fatto finora su questo nuovo ramo di scienza, fondato dal Boole, e che ora va rapidamente svolgendosi. La grande cura usata dall'A., la sua profonda erudizione, la completissima bibliografia che accompagna il lavoro, fanno sperare che quest'opera colossale sarà il vasto repertorio che dovrà compulsare chiunque intenda fare nuovi studii in questo campo.

Però non vorrei che la mole del libro spaventasse il lettore, e che questi ne deducesse una difficoltà nello studio della logica matematica. Le più importanti leggi, quelle riconosciute utili alla pratica, si possono apprendere in breve tempo, e con minor fatica, di quella che esiga la lettura d'un comune trattato di logica. Il libro dello Schröder contiene moltissime discussioni, spesso di pura filosofia, che può benissimo tralasciare chi intenda servirsi a solo scopo pratico di questo nuovo strumento.

L'A. invero destina il suo libro a due specie di lettori oggidì troppo diversamente predisposti, ai matematici cioè e ai filosofi. Ed avendo anche l'intenzione di pubblicare un libro intelligibile a chiunque abbia retto intendimento, senza presupporre cognizioni precedenti, dovette minuziosamente spiegare molti punti, a cui i matematici sono assuefatti.

Non seguirò l'A. nella parte filosofica, essendone io incompetente. Riguardo alla parte matematica, già implicitamente ne feci una recensione negli articoli precedenti sulla logica matematica, nei quali mi sono appunto ampiamente servito del lavoro dello Schröder. Tutte le formule contenute nelle prime 8 lezioni dello Schröder trovansi in sostanza riportate nei §§ 1-4 della mia ultima nota. Però c'è differenza nell'ordine con cui si presentano queste formule nello Schröder, e nella mia raccolta, e non c'è nemmeno corrispondenza fra gli assiomi o principii, le definizioni e i teoremi, poichè si partì da punti di vista differenti; invero, in questo primo volume l'A. si occupa solamente del calcolo sulle classi (*Gebietekalkul*), riservando al secondo volume il calcolo sulle proposizioni (*Aussagenkalkul*) (il quale è invece l'oggetto della mia nota).

L'introduzione (di 125 pagine) costituisce da sè un libro. In essa l'A. espone lo scopo della logica deduttiva, la natura del pensiero, delle idee, dei nomi, ecc., ossia tutto quel materiale che trovasi nei trattati ordinarii di logica. Solo dopo questa introduzione l'A. entra *in medias res*, cioè nell'Algebra della Logica, che differisce così notevolmente e nella forma e nella sostanza dalla logica esposta negli ordinarii trattati, e che appartiene alla matematica, e più precisamente alla teoria delle operazioni.

Nella prima lezione l'A. spiega il concetto di subordinato e sovraordinato. Per indicare che « la classe a è contenuta nella classe b » scrive « $a \leqq b$ », o meglio adotta un segno derivato dal $\leqq$; e fa vedere, d'accordo col Peirce, che questa è la più semplice relazione che si possa immaginare. (Per evitare difficoltà tipografiche, io indicai la stessa relazione con $a \mathbin{\supset} b$). Invece il Boole riteneva come fondamentale il concetto di eguaglianza. Con numerosi esempi l'A. discute e chiarisce questi concetti.

Spiega gli equivoci cui può dar luogo lo scrivere, come alcuni fanno, $a = b$ per indicare « ogni a è b ». Così secondo questa notazione, si avrebbe *argento = metallo, oro = metallo,* onde ci sarebbe pericolo di dedurre la eguaglianza dei primi membri [1]. Analogamente vi sarebbero a temere equivoci adottando per lo stesso scopo i segni ordinarii di maggiore e minore.

Nella seconda lezione enuncia due principii, quello di identità (Formule di logica § 1 P1) e il sillogismo (id. § 1 P8); definisce l'eguaglianza (id. § 2 P1), e ne dimostra le proprietà (id. § 2, prop. 2, 12, 11, 13). In seguito introduce i moduli dell'addizione e moltiplicazione logica, cioè le classi *nulla* e *tutto*, che egli indica con 0 e 1, e che definisce mediante la proprietà, che, qualunque sia a, si abbia $0 \mathbin{\supset} a \mathbin{\supset} 1$.

Si noti però che l'uso di queste cifre in questo significato particolare può dar luogo ad equivoci. Così la scrittura:

(Radice d'una data equazione) = 0

si può interpretare in due modi, secondochè il segno 0 si legge *zero* o *nulla;* nel primo caso essa significa

« Quell'equazione ha la sola radice zero »

nel secondo:

« Quell'equazione non ha radici ».

Questo pericolo è notato dall'A. a pag. 193, ma non parmi che il rimedio indicato sia sufficiente. Quindi parmi miglior consiglio usare d'accordo col Peirce, il segno v (iniziale di vero) come modulo della moltiplicazione, e lo stesso segno rovesciato (ʌ) come quello dell'addizione, il quale ultimo poi solo ha importanza pratica.

Le lezioni terza, quarta e quinta si riferiscono alla moltiplicazione e addizione logica (congiunzione e disgiunzione), e allo studio delle loro proprietà.

---

(1) Anche in molti trattati di aritmetica si scrive impropriamente p. e. « a = multiplo di b » per dire « a è un multiplo di b » cioè « $a \,\varepsilon\, b \times \mathrm{N}$ ».

La sesta lezione è specialmente dedicata all'esame della proposizione $(a \cup b)c \supset ac \cup bc$ (che è la prop. 21 del § 3 della mia raccolta), e che l'A. fa vedere non essere conseguenza delle precedenti, ma doversi ammettere, almeno in parte, come un nuovo principio (o proposizione primitiva) (1).

---

(1) È questo un notevolissimo risultato dovuto allo Schröder. Questa questione si può enunciare nel modo seguente:

Si consideri un sistema di enti S; suppongasi definita una relazione fra due enti a e b, che indicheremo con $a \supset^* b$. (Il segno $\supset^*$ indica una relazione qualunque; per indicare la deduzione conserveremo il segno $\supset$). Supponiamo che essa sia *riflessiva* e *transitiva* (vedasi la nota del dott. Vailati, in questa Rivista, pag. 131), cioè si abbia

$$a \supset^* a$$

$$a \supset^* b \,.\, b \supset^* c : \supset . \, a \supset^* c.$$

Suppongasi poi che dati due enti a e b del sistema, risulti determinato un ente $a \cap^* b$ tale che si abbia qualunque sia c:

$$c \supset^* a \cap^* b \,. = : c \supset^* a \,.\, c \supset^* b.$$

ed un altro ente $a \cup^* b$ tale che

$$a \cup^* b \supset^* c : = : a \supset^* c \,.\, b \supset^* c.$$

In conseguenza per questi enti saranno vere tutte le formule contenute nelle lezioni 1ª-5ª dell'A. (e quindi p. e. tutte quelle della menzionata nota del Vailati). Si domanda se di necessità sarà anche vera la relazione

$$(a \cup^* b) \cap^* c \supset^* (a \cap^* c) \cup^* (b \cap^* c)$$

(poichè la relazione inversa, corrispondente a §3 P20, si può agevolmente dimostrare).

In più modi si possono interpretare i segni $\supset^*$, $\cup^*$, $\cap^*$ in guisa da verificare alle condizioni precedenti. Così:
si consideri il sistema dei numeri reali, e

con $a \supset^* b$ si intenda la relazione $a \geqq b$,
con $a \cap^* b$ » il massimo dei due numeri a e b,
con $a \cup^* b$ » il minimo di essi.

Oppure:
si consideri il sistema dei numeri interi e positivi, e

con $a \supset^* b$ si intenda « a è multiplo di b »,
con $a \cap^* b$ » il minimo comune multiplo di a e b,
con $a \cup^* b$ » il massimo comun divisore di a e b.

Sempre saranno verificate le condizioni precedenti e quindi sono vere tutte le formule suddette, ove loro si dia l'interpretazione indicata.

Questa osservazione dimostra maggiormente l'importanza dello studio delle formule di logica, potendosi esse applicare non solo alla logica pura, ma anche in altre ricerche. Così il principio di dualità in logica, interpretato nell'ultimo modo, si enuncia così:

Le lezioni settima e ottava si riferiscono alla negazione.

La nona contiene una lunga serie di applicazioni.

Dapprima fa vedere gli inconvenienti cui si va incontro quando per somma di due classi a e b si intenda l'insieme di due individui che sono o a o b, *contando due volte quelli che appartengono ad ambe le categorie.* Poi si ferma sulla mancanza di precisione e sui pericoli di equivoci che derivano, nel linguaggio ordinario, dalle congiunzioni *e*, *o*, *non*, e come

---

« Se in una proposizione qualunque che riguarda i multipli, i divisori, il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo di più numeri, si scambia il primo col secondo termine, e il terzo col quarto, si avrà una nuova verità ».

In questi due esempi è verificata completamente la proprietà distributiva in questione. Per far vedere che questa proprietà non è conseguenza delle enunciate, basta recare un esempio d'una interpretazione tale da darsi ai segni $\supset^*$, $\frown^*$, $\smile^*$, in modo che, essendo verificate le condizioni imposte, non sia verificata la proprietà distributiva. L'A. porta appunto nelle appendici 5 e 6, due di tali esempi, appartenenti al dominio della logica. Credo non inutile l'aggiungerne altri due, presi da differenti parti delle matematiche.

1° Si considerino le *sostituzioni* di n lettere, e siano a, b, ... dei *gruppi* di sostituzioni (JORDAN, *Substitutions*), ovvero *sistemi di sostituzioni coniugate* (SERRET, *Algèbre*). Si indichi con $a \supset^* b$ la relazione « il gruppo a è contenuto nel gruppo b ».

Con $a \frown^* b$ si indichi il massimo gruppo contenuto in a e in b (che è appunto il sistema di sostituzioni comuni ai due gruppi a e b, poichè questo sistema è appunto un gruppo).

Con $a \smile^* b$ si indichi il minimo gruppo contenente a e b (che contiene tutte le sostituzioni di a e di b, ed altre ancora, loro prodotti).

Allora non è sempre vero che sia $(a \smile^* b) \frown^* c \ \supset^* \ (a \frown^* c) \smile^* (b \frown^* c)$. (Per assicurarsene, basta considerare i gruppi di sostituzione di 3 oggetti).

2° Si considerino delle figure piane *convesse*, cioè delle figure piane, tali che se due punti appartengono ad essa, tutto il segmento che li unisce appartiene pure alla figura. Essendo a, b, ... figure siffatte, con

$a \supset^* b$ si indichi « la a è contenuta nella b »,

$a \frown^* b$ » « la massima figura convessa contenuta in a e in b »

(che è appunto la figura comune a a e a b, essendo questa convessa) e con $a \smile^* b$ si indichi « la minima figura convessa contenente a e b » (che contiene i punti di a e di b, ed altri punti).

Nemmeno in questo caso è vera la proprietà distributiva. Per es. se a e b sono due cerchi esterni l'uno all'altro, allora $a \smile^* b$ indica una figura limitata da due archi di quelle circonferenze e dalle loro tangenti esterne. Si prenda per c un cerchio contenuto in $a \smile^* b$, ma avente nessun punto a comune nè con a, nè con b. Allora si avrà $(a \smile^* b) \frown^* c = c$; mentrechè $(a \frown^* c) \smile^* (b \smile^* c)$ è nullo.

esse si debbano nei varii casi tradurre in simboli. Tratta in seguito del modo di trasformare e semplificare, in virtù delle formule di logica, alcune proposizioni del linguaggio ordinario. P. es. la proposizione « i sali incolori sono sali inorganici, ovvero sono corpi inorganici incolori » è una identità logica, ovvero una proposizione di chimica?

Sono a notarsi (pag. 380) le proprietà della classe $a - b \cup b - a$ ch'egli indica con $a \circ b$ (V. Formule di logica, §4 P24 e segg. nelle aggiunte).

La lezione successiva si riferisce alle funzioni d'una o più classi variabili, ottenute eseguendo su esse e su classi fisse più volte le operazioni studiate. Il teorema principale, dovuto a Boole, è:

Ogni funzione $f(x)$ d'una classe x si può ridurre alla forma

$$f(x) = ax \cup b(-x),$$

ove a e b sono i valori di $f(x)$, quando al posto di x si metta rispettivamente la classe *tutto* e la classe *nulla*, cioè $a = f(\mathrm{V})$ e $b = f(\Lambda)$ (vedasi la pag. 10 di questa Rivista).

Nella lezione undecima sono spiegati i metodi per risolvere ogni equazione logica o sistema di equazioni siffatte. La dodicesima tratta delle operazioni inverse dell'addizione e moltiplicazione logica. Le lezioni tredicesima e quattordicesima infine contengono moltissimi esercizii, e nuovi metodi per risolvere problemi particolari.

Una recensione, dal punto di vista matematico, di quest'opera, fu pubblicata da D. Z. C. de Galdeano, *El progreso matemático*, 1891, pag. 139.

Un'altra recensione, dal punto di vista filosofico, fu pubblicata da H. C. Husserl, *Göttingische gel. Anzeigen*, 1891, pag. 243, e in questa il recensionista va poco d'accordo coll'autore.

Recentemente è uscita la prima parte del secondo volume di questa opera; e l'A. (lez. 15) entra nel calcolo sulle proposizioni (*Aussagenkalkul*).

Essendo a una proposizione contenente una lettera x, allora, seguendo il Peirce, scrive $\sum_x a$ per indicare « la proposizione a è vera per qualche x », ossia « esiste almeno un x, per cui è vera la a », e scrive

$\prod_x a$ per dire « qualunque sia la x, è vera la a ».

Però questi segni non sono punto necessarii. Invero la prima proposizione, che è la negazione della $a = \Lambda$, si può scrivere $a - = \Lambda$, avendo cura di mettere al segno $=$ l'indice x, ove sia necessario per la chiarezza. La seconda proposizione poi non si presenta mai sotto la forma indicata « qualunque sia x, è vera la a », ma bensì sotto quell'altra « qualunque si sia la x, purchè d'una certa classe s, è vera la a », che si indica con $x \varepsilon s . \supset . a$ (mettendo al segno $\supset$ l'indice x, ove sia necessario). Così si scriverà:

$$x \varepsilon \mathrm{q} . \supset . (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

ovvero $$x \varepsilon \mathrm{q} . (x+1)^2 - = x^2 + 2x + 1 : = \Lambda.$$

Solo quando si sappia a priori quali enti rappresentano le lettere introdotte, come avviene nel caso attuale in cui le lettere rappresentano sempre classi, quella indicazione si può sottintendere.

Coi segni introdotti l'A. esprime in formule il centinaio di proposizioni contenute nel 1° volume.

In seguito fa vedere come nelle formule così scritte non sussista più completamente la legge di dualità.

Nella lezione 16ª l'A. tratta delle proposizioni fondamentali della logica nel calcolo delle proposizioni, e siccome a questo punto c'è molta relazione fra il lavoro dell'A. e le mie formule di logica, sarà bene arrestarci un momento.

Il principio dell'identità, che è la formula §1 P1 della mia raccolta, cioè $a \supset a$, significa « se a è vera, essa è vera ». In conseguenza questo principio, che i logici chiamano fondamentale, non può essere di alcun aiuto in un ragionamento, poichè permette solo di *ripetere* tale e quale una proposizione già enunciata. E invero, nella mia raccolta, mai ebbi a citare siffatto principio (salvo per ottenere l'altra proposizione dello stesso valore $a = a$). L'A. invece attribuisce a questo principio un significato più ampio, cioè che « una proposizione riconosciuta vera, si possa *in ogni occasione* ripetere », e quindi implicitamente fa contenere in questo principio le proposizioni primitive 2, 3, 4, 5 e 12 del mio §1. A mio avviso invece, queste proposizioni che permettono non solo di ripetere inalterato un complesso di proposizioni, ma bensì di fare in questo complesso qualche leggiero cambiamento, non sono contenute nella prop. 1, ma debbono essere esplicitamente enunciate.

L'affermazione simultanea di due proposizioni (pag. 53), è nel calcolo sulle proposizioni, un'idea primitiva (*Urbegriff*); con essa si può definire il prodotto di due classi. L'A. osserva che la prop. $a \supset bc . = : a \supset b . a \supset c$ (*Formule*, §2 P18), che, per le classi aveva assunto come definizione del prodotto, per le proposizioni si debba ritenere come un teorema, o come un principio. Nella mia raccolta esso figura come un teorema. L'A. a questo punto aggiunge: « Io sono effettivamente in dubbio, se in questi casi limiti esista ancora una rigorosa differenza fra le idee di definizione, assioma o principio, e teorema ».

Nella lezione 17ª l'A. tratta dei giudizii e delle relazioni fra due classi. È a notarsi un sistema di notazioni relativamente semplici e simmetriche che permettono di esprimere queste relazioni; però, siccome esse esigono dei segni tipografici speciali, difficilmente entreranno nel dominio pubblico; d'altra parte esse non sono necessarie.

Nella lezione successiva si riducono tutte le relazioni fra classi ad eguaglianze o a ineguaglianze, e si studiano le relazioni che possono sussistere fra due o più classi.

Nella 19ª lezione si tratta della risoluzione di sistemi di eguaglianze e di ineguaglianze, e della eliminazione di classi incognite in tali sistemi.

Nella 20ª lezione si discute il sillogismo, che è l'eliminazione del termine medio fra le due premesse, e si esaminano quali delle forme usuali sono vere e quali incomplete.

La lezione 21ª contiene alcune acute discussioni su delicate differenze fra il calcolo sulle proposizioni e quello sulle classi. In seguito si risolvono parecchi problemi, che conducono alle questioni trattate nella lezione 19ª. Eccone uno come esempio (MITCHELL):

« Si sa che alcuni a, che sono degli x, non sono degli y; ovvero che ogni d è ad un tempo x e y. Contemporaneamente si sa che alcuni y sono b ed x; ovvero che gli x sono o dei non y, o sono c e non b. Cosa si può conchiudere delle classi a, b, c, d? » Eliminando le x e y colle regole precedenti, si ottiene:

« Ne avverrà che, o nessun d è b, e tutti i d sono c, ovvero esistono degli a, o esistono dei b ».

La lezione 22ª riguarda gli individui (punti); e io non intendo ora di fermarmi su questo argomento. Alla fine l'A. dà la definizione del numero (*Anzahl*) degli individui contenuti in una classe.

La lezione 23ª contiene studii ulteriori sui sillogismi e sulla risoluzione di eguaglianze e diseguaglianze fra classi.

Conchiudo questa recensione coll'ammirare l'opera magistrale dell'A. in cui è contenuto tutto quanto si riferisce, al giorno d'oggi, a questo nuovo ramo scientifico. L'Algebra della Logica è ora in via di formazione; quindi l'accurato Autore dovette discutere tutti i tentativi fatti, e riesporre molte teorie di diversi autori, che non hanno applicazione immediata. Solo l'applicazione continuata, e su vasta scala, di questa scienza, i cui principii, ripeto, sono assai semplici, ci porrà in grado di riconoscere quali fra le innumerevoli formule sono utili e quali meno; quali teorie si dissecheranno spontaneamente perchè sterili; quali notazioni, sia in riguardo alla sostanza che alla forma, sono a preferirsi; e così ottenere un corpo di dottrina semplice ed utile nella pratica. Io credo che a questo risultato si arriverà specialmente colle applicazioni alla matematica, ove le idee sono completamente precisate; invece applicandole, secondo l'antica usanza dei logici, ad esempi tratti dal linguaggio comune, in cui i termini sono sempre alquanto imprecisi, e quindi non atti a passare più volte nel meccanismo delle formule, si arriva qualche volta a risultati assurdi o troppo semplici, e quindi poco utili ad illustrare la teoria.

(P.)

Risoluzione della questione a pag. 102.

Si prenda per asse delle x l'orizzontale condotta per B e per asse delle y la verticale condotta per A. S'indichi con P il peso di ciascuna delle due carrozze, con p il peso dell'unità lineare di fune e con ω l'angolo che la tangente alla linea, in un punto (x, y), fa colla direzione positiva dell'asse Ox. La componente tangenziale del peso P è allora [1]

---

[1] Dei due segni di tg ω si tien conto soltanto del — perchè ω non può prendere evidentemente valori $< 90°$ nè $> 180°$.

$$\mathrm{P} \operatorname{sen} \omega = -\mathrm{P} \frac{\operatorname{tg} \omega}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \omega}} = -\mathrm{P} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

e quello del peso dell'elemento ds di fune è

$$p ds \operatorname{sen} \omega = -p \frac{dx}{\cos \omega} \operatorname{sen} \omega = -p \operatorname{tg} \omega \, dx = -py' dx ;$$

onde, per ogni posizione (x, y) di ciascuna carrozza, la tensione della fune nel punto di contatto A (o, a) colla carrucola, è espressa da

$$-\mathrm{P} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \int_a^y py' dx = -\mathrm{P} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - py + pa.$$

Ora è evidente che la condizione d'equilibrio del sistema sarà soddisfatta ove questa tensione si conservi costante; e poichè quella corrispondente alle posizioni A e B delle carrozze è $\mathrm{P} \operatorname{sen} \omega_0 + pa$, avremo che l'equazione del tracciato di una funicolare soddisfacente alla questione, sarà somministrata dall'equazione differenziale

$$-\mathrm{P} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - py = \mathrm{P} \operatorname{sen} \omega_0 ,$$

ovvero, posto $\dfrac{\mathrm{P}}{p} = r$, dall'altra

$$y = -r \operatorname{sen} \omega_0 - r \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} . \tag{1}$$

Differenziando, separando le variabili x e y' e integrando, s'ottiene successivamente:

$$y' dx = -r \frac{dy'}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

$$dx = -r \frac{dy'}{y'(1+y'^2)^{3/2}},$$

$$x = -\frac{r}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{r}{2} l \frac{\sqrt{1+y'^2}+1}{\sqrt{1+y'^2}-1} + \mathrm{C} ;$$

ed eliminando y' mediante la (1), ricavasi

$$x = -\sqrt{r^2 + (y - r \operatorname{sen} \omega_0)^2} + \frac{1}{2} rl \frac{r + \sqrt{r^2 - (y + r \operatorname{sen} \omega_0)^2}}{r - \sqrt{r^2 - (y + r \operatorname{sen} \omega_0)^2}} + \mathrm{C}. \tag{2}$$

I valori delle costanti sen ω_0 e C saranno forniti dalle equazioni

$$
(3)\left\{\begin{aligned}
o &= -\sqrt{r^2-(a+r\operatorname{sen}\omega_0)^2}+\frac{1}{2}\,rl\,\frac{r+\sqrt{r^2-(a+r\operatorname{sen}\omega_0)^2}}{r-\sqrt{r^2-(a+r\operatorname{sen}\omega_0)^2}}+\mathrm{C}\\
b &= -r\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\omega_0}+\frac{1}{2}\,rl\,\frac{1+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\omega_0}}{1-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\omega_0}}+\mathrm{C},
\end{aligned}\right.
$$

le quali esprimono la condizione che la curva contenga i punti A e B, distanti fra loro di a sulla verticale e di b sulla orizzontale.

Di qui si rileva intanto che la condizione relativa alla invariabilità della tensione serve a determinare completamente il problema.

Vediamo ora come possa ottenersi effettivamente il tracciato della funicolare, giacchè, non sapendo risolvere il sistema (3), il medesimo non può esserci fornito direttamente dalla sua particolare equazione.

Esaminando la (2) si scorge che la forma della curva da essa rappresentata è indipendente dai valori di sen ω_0 e di C, inquantochè ad ogni variazione di queste costanti corrispondono nient'altro che traslazioni di essa lungo gli assi coordinati. Posto allora $\mathrm{C}=0$, sen $\omega_0=0$, si ha l'equazione della medesima curva sotto la forma più semplice

$$
(4)\qquad x=-\sqrt{r^2-y^2}+\frac{1}{2}\,rl\,\frac{r+\sqrt{r^2-y^2}}{r-\sqrt{r^2-y^2}}\,;
$$

e il tracciato richiesto s'otterrà determinando graficamente su di essa due punti A e B distanti fra loro di a sulla verticale e di b sulla orizzontale. Questa operazione, avendo una squadra con un cateto diviso in millimetri, può farsi con sufficiente esattezza, facendo scorrere questo cateto parallelamente alla nota direzione AB fino al punto in cui la parte di esso intercettata dalla curva sia eguale a $\sqrt{a^2+b^2}$.

È degno di nota che essendo la (4) omogenea rispetto a x, y, r, uno stesso disegno rappresentativo della curva può servire per tutti i possibili valori di r, purchè si adotti caso per caso una conveniente scala di riduzione nella rappresentazione delle distanze a e b.

Discussione. — Dall'equazione (4) e dalla relazione

$$
(5)\qquad y'=-\frac{y}{\sqrt{r^2-y^2}}\,,
$$

che si ricava dalla (1) dopo avervi fatta sen $\omega_0=0$, si deduce che questa curva ha per assintoto l'asse delle x ed è tangente a quello delle y nel punto di sua *massima elevazione* $y=r$ [1].

[1] S'intende che qui consideriamo il solo ramo con ordinate positive.

Cosicchè una prima condizione di possibilità del problema è

$$a < r \quad \text{ovvero} \quad ap < \mathrm{P},$$

vale a dire, è necessario che il peso di ciascuna carrozza sia *maggiore* del peso di quel tratto di fune eguale al dislivello che v'è tra i punti estremi della strada.

Quanto alla distanza b, corrispondente a un determinato valore di a, conviene anzitutto dimostrare che essa va decrescendo a misura che aumenta l'ordinata del punto A, e che quindi essa diventa minima quando A coincida col punto $y = r$ e per conseguenza B col punto $y = r - a$.

Indicando infatti per brevità di scrittura con $f(y)$ il 2° membro della (4), abbiamo

$$b = f(y - a) - f(y)$$

e derivando,

$$\frac{db}{dy} = \frac{df(y-a)}{d(y-a)} - \frac{df(y)}{dy},$$

e poichè per la (5)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = -\frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y},$$

se ne deduce

$$\frac{db}{dy} = \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y} - \frac{\sqrt{r^2 - (y-a)^2}}{y - a} = \sqrt{\frac{r^2}{y^2} - 1} - \sqrt{\frac{r^2}{(y-a)^2} - 1},$$

la quale è sempre negativa per tutti i valori d'$y \geqq a$. Ciò posto, è chiaro che per ogni dato valore di $a < r$, affinchè il problema sia possibile, è necessario e sufficiente che sia

$$b \geqq f(r - a). \tag{6}$$

Trattandosi effettivamente della costruzione d'una funicolare, non potrebbe prendersi per estremo superiore della linea il punto $y = r$ e neppure punti ad esso molto prossimi, per la ragione che non è lecito far assumere alle carrozze inclinazioni troppo forti. Stabilendo l'm per 100 come *maximum* delle pendenze praticamente tollerabili, si può dedurre dalla (5) il *limite superiore* y_1 dei valori di a per un dato valore di r, e dalla (6) il corrispondente valor *minimo* delle distanze b.

Si ha infatti dalla (5) per $y' = -\frac{m}{100}$

$$y_1 = r \frac{m}{\sqrt{100^2 + m^2}}$$

e dalla (6)

$$b \geqq f(y_1 - a) - f(y_1).$$

Dimostriamo finalmente che il problema non può ammettere che una sola soluzione. Se vi fossero due coppie di punti A, B ed A', B' sulla curva (4), corrispondenti agli stessi valori delle distanze a e b, le corde AB, A'B' sarebbero eguali e parallele e tali sarebbero, per conseguenza, anche le corde AA' e BB'. Ora che ciò non sia possibile si rileva dall'esame della (5) la quale insegna, che la funzione y è *continuamente* decrescente al crescere della x, che la sua derivata y' può prendere *tutti* i valori da 0 a $-\infty$, e che a valori *differenti* d'y corrispondono valori *differenti* d'y'; in virtù di queste proprietà della funzione y, infatti, si può evidentemente asserire che i quattro punti A, B, A', B', in qualunque ordine si succedano, determinano tre archi *consecutivi* le cui tangenti (che certamente esistono) parallele alle rispettive corde sottese, hanno direzioni tra loro differenti.

Pistoia, 27 maggio 1891. S. SBRANA [1].

Osservazioni sopra l'articolo del D^r G. VIVANTI

Sull'infinitesimo attuale

di RODOLFO BETTAZZI *a Torino.*

Il chiar^mo D^r G. Vivanti, in un suo pregevole articolo pubblicato nel fascicolo precedente di questa *Rivista* (p. 135-153), si è proposto la questione: « Esiste l'infinitesimo attuale? » e l'ha risoluta rispondendo così (§ 11):

1° Il calcolo infinitesimale non ha bisogno che delle sole quantità finite;

2° Il campo d'esistenza di una variabile reale positiva consta unicamente di quantità finite, ad eccezione di due sole, 0 ed ∞; e l'infinitesimo attuale, come grandezza estensiva, cioè rappresentabile mediante un segmento, non esiste;

---

[1] La questione proposta è indeterminata. Per determinarla occorre aggiungere qualche condizione. Il prof. S. Sbrana nella soluzione che precede aggiunge la condizione che la tensione della fune sulla carrucola sia costante. Noi continueremo a pubblicare quelle altre soluzioni che ci perverranno, nelle quali si impongano alla funicolare altre condizioni, come quella del tracciato minimo; e questo facciamo sia per l'eleganza analitica del problema, sia perchè l'ingegnere che lo propose, lo fece a scopo pratico, quindi è utile che di esso si diano più soluzioni, onde poter scegliere nella pratica la migliore.

G. PEANO.

3° Nessuna prova in favore dell'infinitesimo può trarsi dalla teoria delle probabilità geometriche, nè da quella dei numeri transfiniti.

In una appendice poi (§ 12), ha dato esempi di infinitesimi esistenti in campi diversi da quello delle quantità reali.

Mi permetto di esporre alcune osservazioni su quell'articolo, al solo scopo di promuovere uno scambio di vedute su di un argomento così interessante, e pur rendendo omaggio alla non comune competenza dell'egregio autore.

1. L'autore espone le principali definizioni date per l'infinitesimo, delle quali una sola merita per noi esame e discussione. L'infinitesimo di cui si studia l'esistenza non è quello *potenziale*, usato in tutti i trattati di calcolo, che si definisce come una quantità finita, variabile e tendente a zero: questo è senza dubbio rigoroso, ed evidentemente basta a trattare il calcolo (come dice nella prima conclusione l'autore) senza che ciò deponga per altro nulla nè in pro nè contro l'altro infinitesimo, quello *attuale* di cui dobbiamo occuparci e che ha il carattere di quantità fissa.

La definizione dell'infinitesimo attuale, meglio che dalle parole dell'autore (§ 2): « Sia divisa l'unità in n parti; se m è un numero qua« lunque minore di n, m di quelle parti (m n-esimi) non basteranno « a formare l'unità. Facciamo ora crescere n oltre ogni limite, sino a « che divenga infinito; ciascuna parte dell'unità potrà dirsi un *infini« tesimo,* e, se m è un numero finito qualunque, m di quelle parti non « potranno mai formare l'unità », per le quali l'infinitesimo si otterrebbe dalla divisione in infinite parti uguali, non ben definita, si ha dalle altre dello stesso autore, che fanno seguito a quelle citate: « ..... esso (l'infinitesimo), ripetuto un numero finito qualsiasi di volte, « non forma giammai ..... una quantità finita determinata qualunque » purchè si prenda la parola *ripetere* nell'ordinario significato della moltiplicazione.

Definito in tal modo l'infinitesimo attuale (che talora per brevità chiameremo semplicemente infinitesimo) mi sembra che la questione posta dall'autore sia una questione già risoluta, almeno finchè si enunci semplicemente così: Esiste l'infinitesimo attuale?

In matematica si dice che un ente esiste quando, non contraddicendo esso per la sua definizione alle definizioni ed alle proprietà degli enti già ammessi, *si enuncia*, per nostro arbitrio, la frase « il tale ente esiste », che sarà quindi un postulato. Per tale esistenza dunque non occorre che un ente della matematica abbia riscontro nella realtà, senza di che non si studierebbero, p. es., lo zero, l'infinito, gli spazi a più

di tre dimensioni, la geometria non euclidea, ecc.; ma basta che non contraddica i postulati già ammessi e le loro conseguenze.

Allora la domanda dell'autore, enunciata in quel modo, equivale all'altra: « Il concetto di infinitesimo ha contraddizioni in sè o con « gli altri concetti generali della matematica? » A questa domanda è stato già risposto negativamente col dare esempi di classi di enti dei quali presi due convenienti α e β, qualunque sia il numero intero n si ha $n\alpha < \beta$, cioè non è soddisfatta la condizione che suol dirsi *Postulato d'Archimede*, mentre lo sono tutte le altre proprietà ordinarie delle grandezze: e l'autore stesso riporta nell'appendice (§ 12) i relativi esempi.

Se dunque l'assenza del postulato d'Archimede non contraddice alle altre proprietà ordinarie delle grandezze, possiamo creare una classe di enti dotata di queste e non di quella: fra esse ve ne saranno alcune α, β tali che per n qualunque intero sarà $n\alpha < \beta$, ed α sarà in quella classe un infinitesimo, se β si dice una quantità finita. Possiamo quindi concludere:

« L'infinitesimo attuale esiste ».

2. Bisogna ora vedere l'importanza che può avere in matematica questo infinitesimo. Importanza astratta avrà certamente il suo studio come quello di qualunque altro ente esistente, e forse esso potrà rendere importanti servigi, se non foss'altro in una trattazione del calcolo diversa dall'ordinaria; ma ci si può chiedere se esso avrà valore di fronte alla realtà o al modo consueto di considerare le grandezze.

Questa è del resto la questione che veramente vuol porsi l'autore, come appare dal corso dell'articolo. Occorre per altro osservare che se si troverà che il concetto d'infinitesimo ripugni a qualche altro concetto o non renda questo conforme allo scopo a cui si destina, ciò non deporrà contro l'esistenza dell'infinitesimo, ma bensì contro l'uso dell'infinitesimo in quel concetto: così come non si oppone all'uso del numero complesso in tante parti della matematica il fatto che esso non si può applicare al continuo dei segmenti.

L'autore cerca in realtà se l'infinitesimo esiste in uno *speciale* campo, quello delle grandezze lineari, cioè delle grandezze corrispondenti ai segmenti: talchè possiamo così formulare la sua domanda: « Esiste il segmento attuale infinitesimo? »

Tale ricerca consiste, per quanto si è già detto, nel giudicare se il concetto d'infinitesimo va d'accordo o no coi postulati che servono a definire il segmento come grandezza, e quindi dipende da tali postulati. E siccome la scelta dei postulati pel segmento, come per qualunque altro ente, è arbitraria e si fa soltanto a seconda dello scopo che ci

proponiamo nello studio di esso, così bisognerà dapprima intendersi sui postulati che vogliamo validi per il segmento.

In questa scelta ci possiamo lasciar guidare o da concetti puramente teorici o dal desiderio di avere un segmento che meglio renda alla mente il fatto di retta e di sue parti che si ha nella pratica comune. In questo secondo modo di vedere sembra che sia l'autore: ed allora, poichè è chiaro che fra i postulati da porsi per il segmento v'è il postulato d'Archimede, il quale equivale all'altro che la classe dei segmenti è connessa (1), giacchè senza di esso si avrebbero fatti ammissibili in teoria, ma non del tutto rispondenti a ciò che si riscontra in pratica, *almeno dentro i limiti delle nostre osservazioni,* si conclude, come giustamente avverte l'autore, che il segmento rettilineo attualmente infinitesimo non esiste. La conclusione che deve dunque trarsi è questa:

« Se si vuole che il segmento sia un ente che si adatti agli usi « che si fanno nelle ordinarie applicazioni, stando a ciò che si osserva « dentro i limiti di osservazione che ci sono concessi, e quindi se si « vuole che la classe dei segmenti sia connessa, il segmento infinite- « simo non esiste ».

Qualora per altro si ritenga che il campo delle nostre osservazioni sia troppo ristretto per poter giudicare se meglio ci si accosti alla realtà con l'ammettere che la classe dei segmenti sia connessa piuttosto che con l'ipotesi opposta, resterà insoluta la questione dell'infinitesimo; e questo esisterà quando si creda opportuno di ammettere per postulato che la classe dei segmenti *non* è connessa.

Un tale dubbio non sembri strano, poichè esempi simili non sono nuovi nella scienza: basta pensare al postulato di Euclide sulle parallele.

3. L'autore oltre la dimostrazione della non esistenza dell'infinitesimo basata sugli argomenti ora accennati della connessione della classe dei segmenti e del postulato d'Archimede, un'altra ne dà al § 3 fondata su un'osservazione di Cantor; ma mi sembra che essa non abbia il valore della prima. Secondo il Cantor (2) un ente s per dirsi grandezza lineare, o in particolare segmento, dev'essere tale che riportandolo di seguito un numero conveniente finito od infinito di volte deve arrivare a superare una grandezza (segmento) finita assegnata. In tale ipotesi il Cantor dà il teorema che l'infinitesimo non esiste; ma la sua dimostrazione è incompleta e non è stata completata da altri, e quindi da essa non si può trarre una conclusione rigorosa.

---

(1) Vedi la mia *Teoria delle grandezze*, §§ 48, 50.

(2) Vedi § 3 dell'articolo e Cantor, *Zur Lehre vom Transfiniten*.

Ma ammettiamo anche che la dimostrazione si ritenga completata o facilmente completabile, e quindi che si consideri come provata la conclusione che dà il Cantor, che cioè se in una classe di grandezze lineari si suppone che esistano due grandezze α e β di cui α sia infinitesima di fronte a β finita e quindi sia $n\alpha < \beta$ con qualunque n intero, dev'essere $n\alpha < \beta$ anche se n è un numero qualunque trasfinito: conclusione che, secondo il Cantor, ripugna col concetto da lui assunto per le grandezze lineari e che quindi dimostra falsa la prima ipotesi $n\alpha < \beta$ e perciò falsa l'esistenza dell'infinitesimo α. Possiamo allora chiederci se realmente questa contraddizione col concetto di grandezza lineare c'è, ed inoltre se questo concetto di grandezza è il più giusto.

Per la 1ª domanda, se essendo n un numero qualunque finito o transfinito si ha sempre $n\alpha < \beta$, vuol dire che con grandezze uguali ad α, sia che si prendano un numero finito od un numero transfinito di volte, non si compone mai una grandezza uguale o maggiore di β: ora poichè il concetto di grandezze lineari (segmenti) dato dal Cantor esige che con un numero *sufficientemente grande* di grandezze α si possa raggiungere o superare β, la contraddizione si avrebbe solo se i numeri transfiniti esaurissero la serie dei numeri infiniti sufficientemente grandi. Puo veramente dirsi che ciò sia? E se ciò non è dimostrato, non sembra che i risultati precedenti, invece che contenere una contraddizione che condurrebbe alla negazione dell'infinitesimo accennino ad una insufficienza dei numeri transfiniti a potere dalla grandezza α passare a quella β? I numeri transfiniti sono immensamente più grandi di qualunque numero finito; ma non essendo *dimostrato* che essi rappresentano la più alta espressione del numero ed essendo, a mio credere, una pura asserzione quella del Cantor (*Acta mathem.*, vol. 2°, pag. 390) che si possa con essi arrivare a tutte le potenze diverse che s'incontrano nella natura materiale ed immateriale, dobbiamo concludere solo che essi sono insufficienti a rendere $n\alpha > \beta$, e che quindi ne occorreranno altri ν di concetto più vasto, in modo che con essi sia $\nu\alpha > \beta$. Se di due numeri di qualunque specie m, n si dice $m < n$ se $m\alpha < n\alpha$, i numeri che occorrono devono essere maggiori di tutti quelli di Cantor. Tali saranno quindi quelli che nella teoria delle grandezze si possono dire di grado n^0, e che servono a misurare una grandezza con una infinitesima rispetto ad essa. Il concetto di numero è affatto libero, e possiamo introdurre numeri quanto e come ci piace, purchè corrispondano a grandezze già esistenti o si definiscano come grandezze essi stessi. Se dunque si pensa che, com'è noto e come già si è accennato, esistono grandezze α, β per le quali $n\alpha < \beta$ qualunque sia n intero e che del resto godono le altre proprietà del segmento in quanto è grandezza lineare, e se si dice numero un ente p tale che

sia definito formalmente dalla relazione $p\alpha = \beta$, si conclude che tal numero è da dirsi maggiore di qualunque numero n per il quale sia $n\alpha < \beta$, e quindi anche di quelli transfiniti di Cantor. Esistono dunque numeri da dirsi maggiori di quelli su cui Cantor appoggia la prova della contraddizione: tale contraddizione perciò non esiste. Si ha dunque che, anche riempita la lacuna nella dimostrazione di Cantor, supposto che sia $n\alpha < \beta$ con n intero finito qualunque sarà $n\alpha < \beta$ anche con n intero transfinito qualunque, il che non contraddice alla costituzione delle grandezze lineari e quindi non dimostra non esistente l'infinitesimo, ma prova che i numeri di Cantor non bastano ad esaurire il concetto di grandezza — a meno che questo concetto di grandezza lineare non si limiti convenientemente, dicendo che, prese due grandezze α e β qualunque, deve essere sempre $n\alpha > \beta$ con un conveniente numero n *finito* o *transfinito*, con che si lascia minore ampiezza di prima nella scelta del numero. Questo del resto sarà semplicemente effetto di un postulato, arbitrario e lecito, ma non del tutto giustificato, non essendo i numeri transfiniti la più alta espressione della moltiplicità.

Possiamo anche occuparci dell'altra obiezione: il concetto di grandezza lineare o del segmento dato dal Cantor è davvero il più giusto o, meglio, il più opportuno? È necessario nel concetto di grandezza quello di formazione di essa con un determinato numero finito od infinito di altre? Faccio osservare l'indeterminazione che regna nella frase « numero infinito di volte », frase che sarà incompleta finchè *tutti* i numeri infiniti non saranno assoggettati ad uno studio sufficiente e rigoroso. Questo studio è fatto, è vero, per i numeri interi transfiniti; ma ho già notato come non sia conveniente limitarsi ad essi, che non rappresentano il concetto più vasto del numero infinito, e quindi la condizione di formazione di cui si tratta apparisce, a mio credere, inopportuna. Soltanto, se si vuole che le grandezze lineari rassomiglino quelle della realtà, sarà conveniente che in quella condizione si tenga conto di ciò che realmente si osserva: ed allora, siccome negli oggetti che ci circondano non ve n'è uno così grande che uno più piccolo della stessa specie ripetuto un numero sufficientemente grande ma *finito* di volte non arrivi a superarlo, la condizione dovrà enunciarsi dicendo che ogni segmento s, ripetuto un numero finito conveniente di volte, deve superare qualunque altro segmento. Tale condizione pone infatti il Du Bois-Reymond nella sua *Allgemeine Functionentheorie* per quelle che egli dice quantità lineari. Allora, siccome questa condizione è il postulato d'Archimede, si ha immediatamente che con essa l'infinitesimo non esiste, e la dimostrazione di Cantor diviene inutile.

4. L'autore dell'articolo, dopo aver dato la dimostrazione della non esistenza dell'infinitesimo, cerca distruggere due argomenti che si è creduto dedurre in favore dell'infinitesimo dalla teoria delle probabilità e dei numeri transfiniti.

Quanto alle probabilità, convengo che si sbaglia dicendo infinitesimo quello che è soltanto lo 0 assoluto: tale errore rende nulla la dimostrazione dell'esistenza dell'infinitesimo, ma del resto niente conclude *contro* di esso.

Per l'altra questione, è vero che è errato il ragionamento di chi sostiene l'infinitesimo, ma mi pare che non sia esatta neppure la risposta che dà l'autore. Nella dimostrazione di chi sostiene l'infinitesimo attuale si dice così: — Siano i ed i_1 infiniti differenti: allora, se s è un segmento, $\frac{s}{i}$ ed $\frac{s}{i_1}$ saranno differenti, il che non è possibile se non esiste l'infinitesimo attuale, giacchè se questo non esistesse, $\frac{s}{i}$ ed $\frac{s}{i_1}$, non essendo segmenti, dovrebbero essere punti e quindi non potrebbero esser differenti. — Qui v'è un errore basato sul credere necessaria una delle due ipotesi: $\frac{s}{i}$ dev'essere o un segmento, o un punto. Vi è la 3ª ipotesi che $\frac{s}{i}$ non sia nè l'uno nè l'altro, o addirittura non rappresenti nulla. Anzi, se non esiste l'infinitesimo attuale (e in questa dimostrazione che tende a mostrare che esiste non può dirsi *sin da principio* che ciò non sia, e quindi ciò *non va escluso*) non si può dividere s in infinite parti uguali, e perciò $\frac{s}{i}$ non è un punto nè un segmento, e propriamente non rappresenta nulla. Di più perchè trattare i punti come grandezze e dire che non possono essere uguali e disuguali insieme?

È dunque nel giusto l'autore quando giudica tale dimostrazione inesatta; ma nel rilevare l'inesattezza mi pare che egli stesso cada in un altro errore. Infatti egli dice: — Ammesso che $\frac{s}{i}$ ed $\frac{s}{i_1}$ siano segmenti, il loro insieme, per un teorema di Cantor, deve essere della 1ª potenza, e quindi i ed i_1 sono numeri transfiniti della 2ª classe: ne segue che il gruppo dei segmenti $\frac{s}{i}$ che compongono s e quello dei segmenti $\frac{s}{i_1}$ che pure compongono s hanno la stessa potenza e quindi

$\frac{s}{i}$ ed $\frac{s}{i_1}$ saranno uguali, contro l'asserzione precedente che li dice disuguali. — Ma (osservo) chi permette di concludere che $\frac{s}{i} = \frac{s}{i_1}$, per il solo fatto che sono uguali entrambi ad s, e quindi fra loro, le somme degli i segmenti $\frac{s}{i}$ e degli i_1 uguali ad $\frac{s}{i_1}$, e che tanti sono i termini della prima quanto quelli della seconda somma, teorema questo di cui siamo sicuri solo quando i ed i_1 sono numeri finiti? Con un simile ragionamento si potrebbe dire che prese due semirette a_1 ed a_2 e riportando sulla prima a partire dal suo estremo un gruppo infinito numerabile di segmenti consecutivi uguali tutti ad uno stesso m, e sull'altra in modo simile altrettanti segmenti uguali ad n, con n *differente* da m, poichè i due gruppi di segmenti riempiono rispettivamente a_1 ed a_2 e si corrispondono segmento a segmento ed $a_1 = a_2$ dovrebbe essere $m = n$, contro l'ipotesi: tale ragionamento non è dunque rigoroso. Oltre a ciò non mi pare esatta la citazione del teorema di Cantor che « se più segmenti in numero infinito sono esterni l'uno « all'altro ed hanno comuni al più gli estremi, e se tutti sono interni « ad uno stesso segmento, il loro gruppo è della 1ª potenza »: giacchè la dimostrazione che ne dà Cantor essendo fondata sul postulato di Archimede, che allora egli suppone nel segmento, il teorema vale in questa ipotesi, che è la negazione dell'infinitesimo; e nel caso nostro, in cui si tratta di decidere se l'infinitesimo esiste o no, e quindi fin da principio non si sa se il postulato d'Archimede vale o no, il teorema non si può dimostrare.

5. Del resto la questione, come da me è stata posta, mi sembra ben risoluta senza che occorra cercare nuove dimostrazioni: l'esistenza dell'infinitesimo attuale è un postulato, il quale non è per altro opportuno per i segmenti destinati all'uso ordinario.

Questa è la conclusione a cui appare voglia giungere l'autore, sebbene in qualche frase ciò non sia così evidente: comunque trovo non corretta, o almeno non chiara la sua proposizione (Appendice): « L'infinitesimo attuale non esiste nel campo delle quantità reali ». Infatti, se per campo delle quantità reali s'intende quello dei numeri ordinari razionali ed irrazionali, per essi è noto immediatamente che soddisfano al postulato d'Archimede, e che quindi fra essi non esistono infinitesimi: se s'intende per quantità reali quelle che sono destinate a rappresentare la realtà, il non esistere fra esse l'infinitesimo è solo effetto, come si è visto, di un postulato desunto dall'osservazione, e che può sopprimersi quando si voglia. Nessun dubbio che il segmento, per

essere utile nella pratica materiale, debba essere definito col postulato d'Archimede, che esclude l'infinitesimo; ma come l'esistenza di un piano in cui di rette parallele condotte da un punto ad una retta non ve n'è che una (il che corrisponde alla pratica dentro i limiti delle nostre osservazioni) non esclude l'importanza di una geometria simile a quella della pseudosfera, dove le parallele sono infinite, così l'opportunità dei segmenti senza infinitesimi non esclude l'interesse di quelli che ne posseggono.

6. Termino riassumendo così le conclusioni che rigorosamente mi sembrano da trarsi:

1° L'esistenza dell'infinitesimo attuale non involge contraddizioni, e quindi l'infinitesimo attuale esiste.

2° Non è conveniente ammettere l'esistenza di un segmento infinitesimo attuale, *solamente* se si vuole una geometria che rappresenti i fatti più comuni delle nostre ordinarie limitate osservazioni.

3° Non può dedursi niente *contro* l'infinitesimo attuale dalla teoria delle probabilità e dei numeri transfiniti.

4° Il calcolo infinitesimale non abbisogna degli infinitesimi attuali, ma potrà usarli quando ne sia stato fatto completo lo studio, restando poi da decidersi se meglio si svolga con essi o cogli infinitesimi potenziali di cui si serve ordinariamente.

Torino, 16 luglio 1891.

Aggiunte e correzioni

alle formule di Logica Matematica [1]

di G. Peano.

Nel nostro articolo, avente questo titolo, ci proponemmo appunto di raccogliere tutte le formule di Logica Matematica, esprimibili coi simboli introdotti, in cui ci fossimo incontrati. Però non ci dissimulammo i difetti di questa prima raccolta. Ora che abbiamo già riscontrate parecchie lacune, pubblichiamo queste aggiunte; e ne pubblicheremo altre man mano che ne troveremo, ovvero che il lettore avrà la gentilezza di indicarle. Queste modificazioni sono indicate con un numero pro-

---

(1) Pag. 24 del presente volume.

gressivo. Basterà, per segnarle, scrivere sul margine dell'articolo precedente, nei luoghi indicati, il numero della correzione.

{1} Alla fine del § 2 si aggiunga:

20. $a \supset . b \supset a$ $\left[\binom{a}{c} \mathrm{P19} \supset \mathrm{P20}\right]$

21. $a \supset : a \supset b . \supset b$ [P19 . §1P7 : $\supset$. P21]

Queste formule sono dovute al Peirce. V. Schröder, *Algebra der Logik*, Bd. II, p. 262.

{2} Dopo §3P9 si aggiunga:

9'. $a \cup b \cup c = a \cup c \cup b$.

Questa formula, notissima, esprime, sotto altra forma, la proprietà associativa dell'addizione logica.

{3} §3P21. Questa proposizione, che si era data come primitiva, si può invece dimostrare. Si cancelli adunque [Pp], e si sostituisca colla dimostrazione seguente:

(α) $c \supset . a \supset ac$ [§1P12 $\supset$ (α)]

(β) $c \supset . b \supset bc$ [» $\supset$ (β)]

(γ) $c \supset : a \supset ac . b \supset bc$ [(α) (β) §1P17 $\supset$ (γ)]

(δ) $c \supset . a \cup b \supset ac \cup bc$ [(γ) P13 $\supset$ (δ)]

21. $c(a \cup b) \supset ac \cup bc$ [(δ) §1P19 $\supset$ Theor.]

{4} Alla fine del § 3 si aggiunga:

24. $ab \supset c . = . a - c \supset - b$.

[$ab \supset c : = : a \supset . b \supset c : = : a \supset . - c \supset - b : = : a - c \supset - b$]

25. $ab \supset c . = . a \supset c \cup - b$

26. $ab \supset c \cup d . = . a - c \supset - b \cup d$

Questa proposizione, che insieme alla P1 di questo §, e alla 8 del successivo, permettono di trasportare i termini o i fattori da un membro all'altro d'una deduzione, sono di uso comune. Esse devonsi al Peirce. Vedi Schröder, id., I, pag. 379, 364 e 378.

27. $ac \supset bc . a \cup c \supset b \cup c : \supset . a \supset b$ }
28. $ac = bc . a \cup c = b \cup c : \supset . a = b$ } [Schröder, id. I, p. 362]

29. $a = b . = . a \cup b \supset ab$ [» » p. 382]

30. $(a \cup b) (b \cup c) (c \cup a) = ab \cup bc \cup ca$ [» » p. 383]

31. $ab \supset cd . b \cup c \supset a \cup d : \supset . b \supset d$

[Vailati, *Rivista di Matematica*, 1891, p. 103]

32. $(a \cup x)(b \cup -x) = a - x \cup bx$ [Schröder, id. p. 376]

33. $(ax \cup b - x)(a'x \cup b' - x) = aa'x \cup bb' - x$

34. $-(ax \cup b - x) = (-a)x \cup (-b)(-x)$

Queste proposizioni servono per lo sviluppo di funzioni di classi. V. Schröder, id., p. 422.

{5} Alla fine del § 4 si aggiunga:

10. $a \cup b - = \Lambda . = : a - = \Lambda . \cup . b - = \Lambda .$ [P9 = P10]

11. $a = \Lambda . \cup . b = \Lambda : \supset . ab = \Lambda$ [P2 ɔ P11]

12. $ab - = \Lambda . \supset : a - = \Lambda . b - = \Lambda$ [P11 = P12]

Queste proposizioni sono del Peirce. V. Schröder, id. II, p. 179.

13. $a \supset b . b = \Lambda : \supset . a = \Lambda .$ [P7 ɔ P13]

14. $a \supset b . a - = \Lambda : \supset . b - = \Lambda .$ [P13 = P14]

V. Schröder, II, p. 202.

15. $ax \cup b - x = \Lambda . = . b \supset x \supset -a$

16. $ax \cup b - x = \Lambda . \supset . ab = \Lambda$

17. $ax \cup b - x - = \Lambda . \supset . a \cup b - = \Lambda .$

18. $ax \cup b - x = \Lambda . px \cup q - x - = \Lambda : \supset : ab = \Lambda . p - a \cup q - b - = \Lambda$

La P15 si riferisce alla risoluzione d'una equazione; le successive alla eliminazione. Vedasi Schröder, I, p. 446, e II, p. 200 e segg.

19. $x \supset a . y \supset b . ab = \Lambda : \supset . xy = \Lambda$ [Schröder, II, p. 280]

20. $xy - = \Lambda . x \supset a . y \supset b : \supset . ab - = \Lambda$ [P19 = P20]

21. $ab = \Lambda . x \cup y = a \cup b . x \supset a . y \supset b : \supset : a \supset x . b \supset y . xy = \Lambda$

22. $x \supset a . y \supset b . z \supset c . x \cup y \cup z = a \cup b \cup c . ab = \Lambda . ac = \Lambda . bc = \Lambda : \supset$
$: a = x . b = y . c = z$

23. $ab = ac = bc = \Lambda . a \cup b \cup c = x \cup y \cup z : \supset .\cdot. x \supset a . y \supset b . z \supset c : =$
$: x = a . y = b . z = c .$

Queste ultime tre prop. contengono, sotto forme diverse, il teorema di Hauber. V. Schröder, II, p. 286.

24. $a \circ b = a - b \cup b - a$ [def.]

25. $a \circ \Lambda = a .$

26. $a \circ a = \Lambda$

27. $a \circ b = b \circ a$

28. $(a \circ b) \circ c = (a \circ b) \circ c$

29. $-(a \circ b) = (-a) \circ b = a \circ (-b)$

30. $a = b \circ c . = . b = a \circ c . = . c = a \circ b$ [Schröder, I, p. 380].

Il teorema fondamentale della Teoria delle equazioni algebriche.

Contributo alla Storia critica dell'Algebra

di Gino Loria.

S'il existe une science de prévoir les progrès de l'espèce humaine, de les diriger, de les accélérer, l'histoire de ceux qu'elle a fait en doit être la base.

Condorcet.

INTRODUZIONE.

Lo stato di incremento incessante in cui trovasi il nostro patrimonio scientifico, rende più vivo il desiderio, anzi più pungente il bisogno, di qualche espediente atto a farne conoscere l'estensione e la portata, e per ridurre al minimo di peso e volume il bagaglio scientifico che ogni studioso deve portare seco. Al raggiungimento del primo intento servono tanto le esposizioni metodiche di speciali dottrine, quanto gli scritti — assai più numerosi — aventi per iscopo di presentare condensato in un enunciato generale unico un gruppo di proprietà sparse. Al raggiungimento del secondo mirano i lavori di comparazione e critica, ove, dal confronto delle investigazioni compiute in un campo determinato, si desume quali fra esse abbiano guidato a risultamenti dotati di originalità e valore, e quali debbano venir espulse dal santuario della Scienza.

Il presente saggio appartiene a quest'ultima categoria di lavori (1),

(1) Altrettanto può dirsi del *Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Functionen einer Variabeln durch trigonometrischen Reihen* di A. Sachse (Abh. zur Gesch. der Matematik. III Heft, 1880. p. 229-276); della memoria *Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz* di O. Baumgart (Zeitschrift für Math. und Phys., XXX Jahrg. 1885, p. 169-236 e 241-277); e del mio discorso intitolato *I poligoni di Poncelet* (Torino, Loescher 1889, al quale serve di complemento la *Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet* inserita nel T. III, nuova serie, della *Bibliotheca mathematica*, p. 67-74), benchè l'occasione in cui esso venne pubblicato, non mi abbia permesso diffondermi in considerazioni critico-comparate che pure si presentavano opportunamente. Mi sembra che varrebbe la pena di consacrare dei lavori analoghi al confronto delle numerosissime dimostrazioni che furono date del *teorema d'addizione degli integrali ellittici*, ed alla *storia del concetto di infinitesimo.*

giacchè ivi ho tentato di valutare le numerose indagini che furono compiute nell'intento di assodare l'esistenza di radici in qualsivoglia equazione algebrica. L'importanza di tale questione è così grande (1) che io mi lusingo non sarà giudicata assolutamente inutile questa mia pur che sia pubblicazione e verrò scusato di essermi deciso a licenziarla per la stampa, quantunque sia ben lungi dal dissimularmi che più di cinque anni di studio non valsero ancora a toglierne tutte le imperfezioni e colmarne tutte le lacune.

I. *Ricerche di D'Alembert, Eulero e Daviet de Foncenex.*

1. La risoluzione effettivamente eseguita delle equazioni algebriche generali dei primi quattro gradi (2), mise in luce questo fatto analitico di capitale importanza, che qualsivoglia equazione di tale specie trova, o nel campo dei numeri reali o in quello degli ordinarî numeri complessi, un numero che la soddisfi. Da questo risultato sperimentale, gli scienziati del secolo passato, con un processo di generalizzazione affrettata che nulla giustificava, conclusero il ripetersi di tale fatto anche per le equazioni di grado superiore, benchè la vanità dei tentativi di sciogliere le equazioni di quinto grado potesse fare supporre che a partire da questo grado cominciasse una categoria di enti algebrici di natura diversa. E questa conclusione fu ritenuta tanto legittima che troviamo A. Girard presupporla nelle celebri relazioni da lui scoperte fra le somme delle potenze simili delle radici di un'equazione ed i suoi coefficienti (3); e più tardi vediamo i sommi Giovanni Ber-

(1) Per convincersene si imagini che cosa rimarrebbe di quanto forma l'Algebra odierna e le sue applicazioni alla Geometria, se non ogni equazione algebrica possedesse radici nel campo degli ordinarî numeri complessi!

(2) Questa pagina, così gloriosa per la nostra patria, della storia dell'Algebra è narrata nel vol. II della magistrale opera del Cossali intitolata *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra* (Parma MDCCXCIX) e più succintamente nel T. III dell'*Histoire des sciences mathématiques en Italie* del Libri (Paris 1840).

(3) A. Girard, *Invention nouvelle en l'Algebre.* Amsterdam MDCXXIX (réimpression par D. Bierens de Haan, Leiden 1884).

Questo fatto ci sembra così notevole che crediamo opportuno riprodurre il testo giustificativo assieme alle definizioni che lo rendono intelligibile:

« I. *Definition.* Equation simple est celle qui n'a qu'une quantité esgale à un nombre: autrement elle est dite Composée ou Meslée.

II. *D.* Equation complette, est celle qui a toute les quantitez sans en delaisser pas une.

noulli ([1]) e Leibniz ([2]) porla a fondamento della decomposizione di una funzione razionale in frazioni semplici colla quale essi hanno inse-

---

III. *D.* Et equation incomplette est une equation meslée, qui n'a pas toutes ses quantitez.

VIII. *D.* Es equations meslées, la plus haute quantité est dite Maxime, ou haute extremité: Celle qui est un degré plus bas, est dite premier meslé; celle qui est encore un degré plus bas, est dite second meslé, et ainsi consequemment, tellement que le (0) [cioè x^0] est la fermeture ou basse extremité.

XI. *D.* Quant plusieurs nombres sont proposez, la somme totale soit dite premiere faction: la somme de tous les produits de deux à deux soit dite deuxieme faction: la somme de tous les produits de 3 à 3 soit dite la troisième faction, et toujours ainsi jusqu'à la fin, mais le produit de tous les nombres soit la derniere faction: or il y a tant de factions que de nombres proposez.

II. *Theoreme.* Toutes les equations d'algebre reçoivent autant de solutions que la denomination de la plus haute quantité le demonstre excepté les incomplettes: et la premiere faction des solutions est égale au nombre du premier meslé, la seconde faction des mesmes, est egale au nombre du deuxiesme meslé; la troisieme, au troisiesme, et toujours ainsi, tellement que la derniere faction est esgale à la fermeture, et ce selon les signes qui se peuvent remarquer en l'ordre alternatif ».

Nelle spiegazioni che il Girard fa seguire a questo enunciato ne troviamo una concernente le soluzioni imaginarie; è la seguente: « On pourrait dire à quoy sert ces solutions qui sont impossibles, je respond pour trois choses, pour la certitude de la reigle generale, et qu'il ny a point d'autres solutions, et pour son utilité: l'utilité est facile, car elle sert à l'invention de semblables équation..... » E siccome nell'*Invention nouvelle* si cerca indarno una dimostrazione del *II Theoreme*, così risulta chiaro in qual senso debbano interpretarsi le seguenti parole dello Stolz: « Der schon erwähnte Girard, trat auch hier mit Entschiedenheit auf, in dem er neben der reellen Wurzel der Gleichungen auch die unmögliche berücksictigte. Durch Zulassung derselben gelangte er zum Satze dass jede algebraische Gleichung so viele Wurzel besitze, als ihr Grad Einheiten enthält » (*Grössen und Zahlen*, Leipzig 1891, p. 17).

([1]) Bernoulli, *Solution d'un problème concernant le calcul intégral, avec quelques abregés par rapport à ce calcul* (Histoire de l'Académie des Sciences MDCCII; Paris MDCCXX, p. 296-305).

La decomposizione di una funzione razionale in frazioni semplici si fa ivi eseguendo prima la divisione del numeratore del denominatore, poi eguagliando il quoziente del resto (di grado inferiore al divisore) pel divisore a una somma di frazioni della forma $\frac{\alpha}{x+a}$, e applicando da ultimo il metodo dei coefficienti indeterminati.

([2]) Leibniz, *Specimen novum analyseos pro scientia infiniti circa summas*

gnato a integrare qualunque espressione razionale. Ma ben presto sorgono degli scrupoli sulla legittimità di questa illazione, sicchè essa, non solo viene provata in casi particolari, ma Eulero ([1]) afferma di essere in grado di *dimostrare* la decomponibilità di ogni funzione razionale intera di una variabile a coefficienti reali in fattori reali lineari o quadratici.

2. In attesa della pubblicazione del ragionamento euleriano, il D'Alembert si accinse alla magnanima impresa di inventarne uno ed espose il risultato dei suoi tentativi nella prima parte delle sue *Recherches sur le calcul intégral* ([2]) (n. I). L'argomentazione di D'Alembert poggia sulla presupposizione che l'ordinata di qualunque curva passante per l'origine delle coordinate o per il punto all'infinito dell'asse delle ordinate sia sviluppabile in una serie ordinata secondo le potenze frazionarie crescenti dell'ascissa; ora siccome ciò *in generale* è falso, così sarebbe stato indispensabile che D'Alembert avesse fatto vedere che è vero *nel caso* particolare che gli interessava. È questa una delle più gravi obbiezioni che Gauss (n. VI, art. 6) ([3]) mosse al-

---

et quadraturas (Acta Eruditorum 1702 e 1703; oppure G. G. Leibnitii, *Opera omnia*, ed. Dutens, T. III, Genevae MDCCLXVIII, p. 373). — Si leggono in questa memoria le frasi seguenti: « Primum ex Algebra suppono divisores simplice cujusque formulae rationalis integrae utcumque cognitos; sunt enim iidem cum radicibus aequationis, quae predirent, si formola pro aequatione habetur..... Itaque ex suppositis resolutionibus aequationum Algebraicis, habentur divisores formularum, et nostra hac Analysis infinitesimalis Analysin algebraicam, ut superior inferior, supponit ».

([1]) *Miscellanea Berolinensia*, T. VII.

([2]) Scrivendo un *n.* seguito da un numero romano, intendiamo richiamare lo scritto che porta lo stesso numero nell'*Elenco* di lavori posto come appendice alla presente memoria.

([3]) Riguardo alla citata obbiezione di Gauss, si osservi che questi a ragione rilevò come in più luoghi D'Alembert accennasse alla possibilità di applicare i suoi ragionamenti a curve trascendenti; ma — cosa sfuggita a Gauss — D'Alembert stesso sconfessò più tardi questi accenni, perchè nella breve nota *Sur la forme des racines imaginaires* (Opuscules mathématiques, T. IV, 1768, p. 342-3), rispondendo a una critica analoga mossagli da « un très-grand Géomètre » egli afferma: « dans mon théorème il ne s'agit que de courbes géométriques, dans lesquelles en effet l'équation $y = \mathrm{A}x^n + \mathrm{B}x^{n-1} + \ldots\ldots$ aura toujours lieu ».

Gli altri appunti mossi da Gauss colpiscono l'uso frequente di quantità infinitesime e di serie infinite in un tema al quale le une e le altre sembrano estranee, e l'asserzione che supponendo una variabile X possa as-

l'argomentazione di D'Alembert; la quale d'altronde non aveva convinto neppure Lagrange (n. IV), che poco prima di Gauss tentò di correggerla, ma con mediocre successo (cfr. il § seguente). Ciò non ostante lo scritto di D'Alembert possiede un indiscutibile valore contenendo un'enunciazione esplicita ed esatta del teorema fondamentale dell'algebra e un primo tentativo di colmare una deplorevole lacuna che la Scienza ivi presentava [1]. Inoltre, l'argomentazione di D'Alembert è tanto lontana dal meritare una definitiva espulsione in nome della logica, che Gauss stesso, dopo averne additati i difetti, soggiunge: « Mi pare però che il vero nerbo della dimostrazione non sia punto distrutto dalle precedenti obbiezioni, e credo che sulla stessa base (benchè per via assai diversa e con maggiore circospezione) non solo si possa costruire una dimostrazione esatta del teorema, ma si possa eziandio trovare quanto si può desiderare intorno alla teoria delle equazioni trascendenti » (l. c. art. 6 in fine), e più innanzi (art. 24) traccia l'andamento generale di una dimostrazione da lui modellata su quella del geometra dell'*Enciclopedia*, cenno che — quantunque lasci ancora da compiere un considerevole lavoro a chi lo voglia trasformare in un ragionamento rigoroso e completo — è sufficiente a servire di conferma al benevolo giudizio pronunciato da Gauss sulle indagini di D'Alembert. Le quali in conseguenza ci sembrano titolo sufficiente a giustificare (dato, e non concesso, che ogni proposizione debba portare una *marca di fabbrica*) quelli che, seguendo l'esempio di parecchi geometri francesi, accordano il nome di *teorema di D'Alembert* alla proposizione su cui si erige la teoria delle equazioni algebriche.

---

sumere un certo valore S e non il valore $U > S$, esisterà fra S e U un valore T che X può raggiungere ma non superare. Riguardo a quest'ultimo appunto (che, come vedremo, colpisce anche altre dimostrazioni del teorema fondamentale), non vogliamo lasciar passare inosservato come Gauss abbia visto, non solo la possibilità dell'esistenza fra S e U di un valore il quale possa venire accostato quanto si voglia ma non mai raggiunto da X, ma anche l'impossibilità che questa circostanza si verifichi quando X è una funzione algebrica razionale intera di una variabile.

(1) L'enunciato di D'Alembert è: « Soit un multinome quelconque $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + fx + g$, tel qu'il n'y ait aucun quantité réelle qui étant substitué à la place de x y fasse evanouir tous les termes, je dis qu'il y aura toujours une quantité $p + q\sqrt{-1}$ à substituer à la place de x et qui rende ce multinome égal à zéro ». Da questo teorema egli deduce, col ragionamento ancora in uso, che: « Les mêmes choses étant supposées, je dis que le multinome pourra toujours se diviser en facteurs $xx + hx + i$, $xx + lx + m$, etc., dont les coefficients soient réels ».

3. Di gran lunga meno fortunati dei tentativi di D'Alembert sono quelli fatti per dimostrare il teorema fondamentale da Eulero, il quale erroneamente credette di essere per due vie differenti arrivato al suo scopo (n. II) ([1]).

Nel primo metodo, egli suppone di avere ricondotto l'equazione da studiarsi ad avere un grado della forma 2^n, il che è sempre possibile col mezzo di una previa moltiplicazione per un conveniente numero di fattori lineari. Fatto ciò, è chiaro che il teorema sarà dimostrato dopo che siasi fatto vedere la possibilità di decomporre il primo membro dell'equazione data $X=0$ in due fattori di grado 2^{n-1}. A tale scopo si faccia sparire il secondo termine di quest'equazione e lo si riduca quindi alla forma

$$x^{2^n} + Bx^{2^n-2} + Cx^{2^n-3} + \dots = 0,$$

e si supponga che

$$x^{2^{n-1}} + ux^{2^{n-1}-1} + \alpha x^{2^{n-1}-2} + \dots$$

$$x^{2^{n-1}} - ux^{2^{n-1}-1} + \alpha' x^{2^{n-1}-2} + \dots$$

siano i fattori del primo membro, ove u, α, α',... sono $2^n - 1$ coefficienti da determinarsi. Eguagliandone il prodotto al primo membro dell'equazione proposta si otterranno $2^n - 1$ equazioni fra questi coefficienti; eliminando fra esse tutti questi coefficienti tranne u si otterrà un'equazione con questa unica incognita il cui grado è $\binom{2^n}{2^{n-1}}$, epperò della forma $2k$, k dispari, e che, contenendo soltanto potenze pari di u, può abbassarsi al grado k; il suo ultimo termine è negativo onde essa è soddisfatta da un numero positivo, la cui radice quadrata sarà un valore reale di u, in funzione del quale si possono esprimere razionalmente gli altri coefficienti α, α',... La decomposizione del primo membro dell'equazione data è pertanto eseguita ed il teorema dimostrato.

Ma bisogna notare che parecchie delle osservazioni intermedie che s'incontrano nel corso di questo ragionamento, si verificano facilmente in equazioni generali di gradi non molto elevati, ma avrebbero

---

([1]) Queste sviste di Eulero non recheranno meraviglia a chi rifletta che le sue idee intorno alle quantità immaginarie erano tanto vaghe da indurlo a dare, nella memoria citata, la seguente definizione: « On nomme quantité imaginaire, celle qui n'est plus grand que zéro, ni plus petite que zéro, ni égal à zero, ce sera donc quelque chose d'impossible, comme par exemple $\sqrt{-1}$, ou en général $a+b\sqrt{-1}$; puisque une telle quantité n'est positive, ni négative, ni zéro ».

bisogno di una giustificazione applicabile sempre, onde la dimostrazione euleriana è per lo meno incompleta. Di più, Eulero cadde in un grave errore fondandosi sulle relazioni esistenti fra le radici ed i coefficienti di un'equazione algebrica qualsia. « La proposizione, la somma delle radici di un'equazione è eguale al primo coefficiente col segno mutato, non pare potersi applicare che alle equazioni aventi radici; ora poichè mediante questa dimostrazione deve stabilirsi che $X = 0$ ha realmente delle radici, non sembra lecito presupporne l'esistenza. Senza dubbio coloro che non compresero ancora la fallacia di questo paralogismo, risponderanno, *qui non volersi dimostrare che si può soddisfare alla* $X = 0$ (chè a ciò torna il dire che essa ha radici), *ma solo che si può soddisfare ad essa mediante valori di* x *della forma* $a + bi$. Ma poichè oltre alla forma reale e all'immaginaria $a + bi$, non si sa concepire altra forma di quantità, non si vede abbastanza chiaramente in che cosa ciò che si vuol dimostrare differisca da quello che si assume come assioma; e anzi, se fosse possibile concepire altre forme di quantità F, F', F'',... non dovrebbe tuttavia ammettersi senza dimostrazione la possibilità di soddisfare a un'equazione qualunque mediante un valore di x, o reale, o della forma $a + bi$, o della forma F, o della forma F', ecc. Quindi quell'assioma non può avere altro senso che questo: Qualunque equazione può essere soddisfatta o mediante un valore reale, o mediante un valore immaginario della forma $a + bi$, o mediante un valore non compreso sotto alcuna forma. Ma in qual modo tali quantità, di cui non si può neppure farsi un'idea — una vera ombra di ombra — possano sommarsi o moltiplicarsi fra loro, non si può al certo capire con quella chiarezza che sempre si esige nella Matematica » [1].

Perciò l'argomentazione euleriana, almeno nella forma sotto cui si trova, non si può ritenere conclusiva: altrettanto dicasi per quelle, che si leggono nella stessa memoria, destinate a provare l'esistenza di fattori quadratici o biquadratici in equazioni di gradi $4n + 2$ o $8n + 4$.

4. Nell'imaginare il secondo suo metodo di dimostrazione del teorema fondamentale, Eulero si è lasciato trascinare dall'analogia, in questo caso ingannatrice, ad affermazioni che fin dai suoi tempi potevano sembrare inverosimili, di cui Gauss dubitava assai e che oggi sappiamo essere completamente erronee. Egli infatti, dai risultati di un esame delle formole di risoluzione delle equazioni dei primi quattro gradi, si ritenne autorizzato a concludere che le radici di ogni equa-

---

[1] Parole di Gauss (n. VI, art. 8), la cui importanza e applicabilità in molte circostanze c'indussero a riportarle qui.

zione fossero esprimibili in funzione dei coefficienti mediante un certo numero di addizioni e sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni, elevazioni a potenze ed estrazioni di radici, e siccome ognuna di queste operazioni, eseguita su numeri complessi, conduce a un nuovo numero complesso, così egli trova essere $a+b\sqrt{-1}$ la forma generale delle radici delle equazioni algebriche e soggiunge: « Voilà une nouvelle démonstration du Théorème général, que je me suis proposé de prouver ici, contre laquelle on se saurait rien objecter si ce n'est que nous ne savons pas, comment les racines des équations des plus hauts degrés après le 4^{me} sont compliquées. Or cette objection n'aura aucune force pourvu qu'on m'accorde que les expressions pour les racines ne contiennent point d'autre opérations, que les expressions des racines, outre les quatre opérations vulgaires: et l'on ne saurait soutenir que des opérations transcendantes s'y mêlassent » (n. II, p. 264).

Dopo che Ruffini e Abel dimostrarono che le *operazioni trascendenti* devono necessariamente intervenire nella risoluzione delle equazioni di grado superiore al quarto e che l'effettiva risoluzione delle equazioni di quinto e sesto grado ha dato a questo risultato una luminosa conferma, non è più il caso di porre in discussione l'argomentazione di Eulero; tutti converranno essere dessa un paralogisma (¹).

5. Uno dei punti deboli della prima dimostrazione di Eulero, fu notato, prima di Gauss, dal cavaliere Daviet de Foncenex (o da Lagrange (²)?), il quale nell'intento di togliere questo difetto all' « ex-

---

(¹) Sembra quasi che a questa pseudodimostrazione di Eulero alludesse il Duhamel quando, trattando degli errori di ragionamento, scriveva: « Les [erreurs] plus dangereuses sont celles qui consistent dans une trop grande extension que l'on donne à des vérités reconnues dans un grand nombre de cas, auxquelles on ne connaît encora aucune exceptions, qui séduisent pas la facilité qu'elles donnent aux démonstrations et aux recherches, et qui sont quelques fois assez spécieuses pour finir par être érigées *a priori* en principe et servir même à l'établissement des cas particuliers qui en avaient donnée l'idée. Il est d'autant plus facile d'y être trompé que le piège ne se cache pas. Une fausse déduction serait découverte immédiatement; un principe faux par trop de généralité a une sorte d'inviolabilité qu'il tire du grand nombre de cas ou il est vrai et de la confiance qu'on voit qu'il inspire à ceux qui l'enseignent » (Duhamel, *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, 1ère partie, 3ème éd. 1885, p. 22).

(²) « Il (Lagrange) fournissait à Foncenex la partie analytique de ses mémoires en lui laissant le soin de développer les raisonnements sur lesquels portaient ses formules ». Così Delambre nella *Notice sur la vie et les ouvrages de M. le Comte J. L. Lagrange.*

cellente pièce » di Eulero intraprese delle indagini che ebbero per risultato la seguente dimostrazione del teorema fondamentale (n. III).

Si abbia un'equazione $X=0$ di grado $n=2^m P$, P dispari, e si supponga che z^2+uz+M sia un divisore di Z; allora i singoli valori di u saranno le somme, cambiate di segno, delle radici dell'equazione $X=0$ prese a due a due, onde u avrà $n_1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ valori e sarà determinato da un'equazione $U_1=0$ di grado n_1. Si vede subito che n_1 avrà la forma $2^{m-1}P_1$, P_1 dispari. Ora se $m>1$, si supponga che $u^2+u_1u+M_1$ sia un divisore di U_1; si vedrà similmente che u_1 sarà determinato da un'equazione di grado $n_2=\dfrac{n_1(n_1-1)}{2}$ e n_2 avrà la forma $2^{m-2}P_2$, P_2 dispari. Se $m>2$ si ragionerà egualmente e così via. Nella serie di equazioni così risultanti $U_1=0$, $U_2=0$, $U_3=0$,... l'm^{esima} $U_m=0$ sarà evidentemente di grado dispari, epperò avrà una radice reale u_m.

Allora asserisce il Foucenex potersi determinare razionalmente M_m mediante u_m e i coefficienti di $U_{m-1}=0$, epperò mediante u_m e i coefficienti di X: perciò M_m essere reale. Ne viene che le radici della equazione $u^2_{m-1}+u_m u_{m-1}+M_m=0$ saranno della forma $p+qi$: ma esse soddisfano l'equazione $U_{m-1}=0$ onde questa ha almeno una radice u_{m-1} di tale forma. Mediante questa radice e i coefficienti di X si può esprimere razionalmente M_{m-1} onde questo è pure di tale forma e lo stesso accadrà per una radice u_{m-2} dell'equazione $u^2_{m-2}+u_{m-1}u_{m-2}+M_{m-1}=0$ cioè per una radice di $U_{m-2}=0$. Così proseguendo si risalirà fino all'equazione proposta e si concluderà l'esistenza di un numero reale o complesso che la soddisfa.

Gauss ha rilevato (n. VI, art. 11) che in questa dimostrazione alcune asserzioni intermedie avrebbero bisogno di sostegni più validi di quelli dati dal De Foucenex e che per ciò farebbe mestieri ricerche assai profonde nella teoria dell'eliminazione. Inoltre l'obiezione capitale fatta contro la prima dimostrazione di Eulero, colpisce in pieno petto ed atterra l'argomentazione ora riportata: ond'essa, quale trovasi esposta dal suo inventore, non può ritenersi per concludente.

II. *Tentativi di Lagrange e Laplace.*

6. Lo scienziato al quale la teoria delle equazioni algebriche deve i più importanti progressi compiuti nello scorso secolo, non poteva rimanere spettatore indifferente agli sforzi fatti da' suoi contemporanei per dimostrare il teorema fondamentale di essa teoria. Ed infatti La-

grange si è occupato di esso in un lavoro (n. IV) inserito fra i *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin* per l'anno 1772 (¹) e la cui materia passò poi a formare le note IX e X del *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*. Ivi egli ha esposto i metodi di dimostrazione proposti prima di lui, ne ha notate le imperfezioni e proposto degli espedienti per rimediarvi. I contributi da lui arrecati alla soluzione della questione che ci occupa sono di due specie.

Nei primi, provocati dallo studio delle ricerche di D'Alembert, Lagrange considera un'equazione della forma $f(x) + V = 0$, ove $f(x)$ è una funzione razionale di x e V una quantità indipendente da x, e suppone che per due valori a e $b > a$ di V l'equazione data abbia radici reali e non ne abbia invece se $a < V < b$; allora egli dice potersi supporre che una radice dell'equazione $f(x) + V = 0$ non reale se $a < V < b$ divenga tale per $V = a$ e $V = b$ e dimostra che per tutti i valori di V compresi fra a e b la radice anzidetta sarà della forma $m + n\sqrt{-1}$. Ora non vi è chi non veda che, così ragionando, egli suppose tacitamente che per quei valori di V, a cui non corrispondono radici reali dell'equazione, esista qualche ente algebrico capace di esprimere una radice in funzione dei coefficienti, senza giustificare in alcun modo questa supposizione. Perciò la sua argomentazione non si può ritenere inoppugnabile.

Benchè Lagrange non l'abbia riconosciuto, pure gli sorse il desiderio di trovarne un'altra più diretta (²) e si propose di provare direttamente la decomponibilità di qualunque polinomio razionale intero in fattori di primo e secondo grado. La dimostrazione da lui datane si fonda tutta sulla teoria delle funzioni simmetriche delle radici di una equazione e tende a far vedere come i cofficienti di uno dei divisori del primo membro si possano far dipendere separatamente da equazioni di cui tutti i coefficienti dipendono razionalmente dai coefficienti di questo; ond'è che anche quest'argomentazione, nella forma in cui si trova, viene privata d'ogni valore dall'obbiezione che Gauss ha mosso contro quella di Eulero e del De Foncenex; essa in realtà contiene una petizione di principio (³). Si noti però che se questo tentativo di

---

(¹) V. anche *Oeuvres de Lagrange*, T. II, 1868, p. 539 e seg.

(²) « Quoique la démonstration précédente soit suffisante pour prouver la vérité de la proposition dont il s'agit, on ne peut disconvenir qu'elle ne soit indirecte, et qu'elle ne laisse encore à désirer une démonstration tirée uniquement des principes de la chose » (*Traité*, etc., 3ème éd., p. 178).

(³) Ciò è sfuggito anche al Poinsot, il quale nell'*Analyse du Traité de la résolution des équations numériques* (ristampato in testa alla III ed. di quest'opera) dice: « Cependant si l'on voulait resoudre effectivement le

Lagrange non fece avanzare di un passo verso la soluzione del problema che ci occupa, esso gettò molta luce sulle leggi che governano le mutua dipendenza fra i coefficienti di un polinomio e i coefficienti dei polinomi che ne sono divisori.

7. Un concetto estremamente ingegnoso informa la dimostrazione che Laplace fece conoscere nel 1795 agli studenti della Scuola Normale (n. V) e che si ritrova poi variamente esposta in molte opere posteriori ([1]), benchè ad essa pure riesca micidiale l'obbiezione mossa da Gauss ai ragionamenti di Eulero, De Foncenex e Lagrange. Ecco l'essenza di essa:

Poichè l'esistenza di una radice in un'equazione di grado dispari a coefficienti reali si dimostra facilmente, si consideri un'equazione $X=0$ il cui grado sia espresso da un numero della forma $2^i s$, s dispari, e se ne indichino con a, b, c,... le radici. L'equazione avente per radici $a+b+mab$, sarà, qualunque sia il valore del coefficiente m, di grado $2^{i-1}s(2^i s-1)$ che è della forma $2^{i-1}s'$, s' dispari. Se $i=1$ questa nuova equazione sarà di grado dispari, epperò, qualunque sia m, avrà una radicale reale; e siccome ad m si possono attribuire infiniti valori, così vi sono infinite radici della forma $a+b+mab$ aventi valori reali; fra esse ve ne saranno certamente di quelle contenenti le stesse radici; se tali sono quelle che corrispondono ai valori m' e m'' di m, saranno $a+b+m'ab$ e $a+b+m''ab$ quantità reali e così dicasi della somma $a+b$, del prodotto ab e del trinomio $x^2-(a+b)x+ab$ che è un fattore di X. Se poi $i>1$, e si suppone l'esistenza di un fattore quadratico nel primo membro di ogni equazione il cui grado sia della forma $2^{i-1}s'$, si vedrà che vi sono infinite funzioni del

---

polynome en ses facteurs réels, comme il serait presque impossible de suivre le procédé indiqué par l'analyse qu'on y emploie, M. Lagrange croit devoir réprendre en entier ce problème générale dans la note X où il fait voir *a priori*, non seulement la possibilité de la décomposition de tout polynome en facteurs réels de 1er et 2e degré, mais encore le procédé qu'il faudrait suivre si l'on voulait actuellement effectuer cette décomposition, ce qui ne laisse plus rien à désirer sur ce point important de la théorie des équations ».

E il Valeriani fu così persuaso dagli argomenti addotti da Lagrange che li riprodusse nella seconda parte della nota intitolata *Ogni equazione di grado* n *ha* n *radici* (Giornale di Matematiche, T. XIII, 1875, p. 8).

([1]) Per es.: Lacroix, *Complément des Eléments d'Algèbre* (4me éd. 1817, p. 80); Hymers, *A Treatise on the Theory of Algebraical Equations* (II ed. 1840, p. 187); Matthiessen, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen* (1878, p. 109), ecc.

tipo $a + b + mab$ il cui valore ha la forma $f + g\sqrt{-1}$ ed il ragionamento precedente menerà a concludere che anche $a + b$ e ab avranno la stessa forma; X avrà perciò un fattore della forma $x^2 + fx + g + \sqrt{-1}(f'x + g')$, quindi anche il fattore $(x^2 + fx + g)^2 + (f'x + g')^2$; ma questa espressione, per la teoria delle equazioni biquadratiche, è decomponibile in due fattori quadratici reali, dunque X ha un tal fattore. Ora siccome per $i = 1,2$ l'ipotesi precedente è verificata, così se ne conclude la verità successivamente per $i = 3,4,...$ Un unico appunto si può fare a questo ragionamento: ed è che ivi *si presuppone* l'esistenza delle radici dell'equazione, onde, nella forma in cui fu esposto da Laplace (¹), esso effettivamente include un circolo vizioso (²).

III. *La prima dimostrazione di Gauss nelle sue due forme, e le dimostrazioni di Perott e Dutordoir.*

8. Le indagini testè rapidamente schizzate furono — ad eccezione di quelle di Laplace — accuratamente esaminate e giustamente criticate da Gauss nella sua celebre Dissertazione di Laurea (n. VI), che

---

(¹) Altrettanto dicasi per quella a cui condussero gli sforzi del Peacock (n. XXI).

(²) Sembra che Laplace non abbia neppure lontanamente supposto questo errore e che riguardo a tutta la questione di cui ragioniamo le sue idee non avessero tutta la desiderabile chiarezza. Infatti, secondo lui, dal fatto che ogni equazione lineare ha una radice e due una quadratica, si può concludere che un'equazione ha tante radici quante unità contiene l'esponente della massima potenza dell'incognita (n. V, p. 36); poi dimostra, al solito modo, l'esistenza di radici reali in tutte le equazioni di grado dispari e in quelle di grado pari col termine noto negativo (ib. p. 42); in seguito (ib. p. 43) dice che « Les racines imaginaires des équations, sont de la forme $m + n\sqrt{-1}$, m et n étant des quantités réelles; et si l'équation a pour racine $m + n\sqrt{-1}$, elle a pareillement pour racine $m - n\sqrt{-1}$; en sorte que les racines imaginaires sont toujours en nombre pair; et l'équation, si elle est d'un degré pair peut être décomposée en facteurs du second degré, dont les coefficients sont réels. Ce théorème important a été admis par tous les analystes avant qu'ils en aient eu une démonstration rigoureuse. D'Alembert est le premier qui l'ait démontré, en faisant voir en même temps, que toutes les imaginaires connues se réduisent à la forme $m + n\sqrt{-1}$ ». E finalmente espone (ib. p. 56-7) il ragionamento riportato nel testo che, secondo lui, dimostra la decomponibilità di un qualunque polinomio intero razionale, quando lo si conosca per uno di 4° grado, e lo inizia con le parole: « Soient a, b, c, etc., les diverses racines de cette équation... »!

già a varie riprese citammo. Ma è costume dei grandi il fondare il nuovo mentre distruggono il vecchio, onde Gauss si è affrettato a indicare un ragionamento affatto originale e sufficiente a mettere in luce la verità del teorema fondamentale dell'Algebra, ragionamento il quale, per essere il primo che sia al coperto da obbiezioni, fece sì che venne dato alla proposizione che ci occupa il nome di *teorema di Gauss* da molti scienziati tedeschi e deve far adottare questo sistema da tutti coloro che ritengono non potersi concedere la dignità di teorema ad una proposizione, fino a che non se ne possieda una inconfutabile dimostrazione: per quelli che pensano così, quanto finora esponemmo sarà designato come un avviamento verso il teorema fondamentale, la cui vera storia comincia solo col ragionamento di Gauss, che ora brevemente esporremo.

Sia $$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m$$

il primo membro di un'equazione a coefficienti reali, e si ponga

$$\mathrm{T} = r^m \cos m\varphi + r^{m-1} \cos (m-1)\varphi + \dots + a_{m-1}\, r \cos \varphi + a_m$$
$$\mathrm{U} = r^m \,\mathrm{sen}\, m\varphi + r^{m-1} \,\mathrm{sen}\, (m-1)\varphi + \dots + a_{m-1}\, r \,\mathrm{sen}\, \varphi.$$

È facile mostrare — anche senza ricorrere alla teoria dei numeri complessi [1] — che, supposto simultaneamente

$$\mathrm{T} = 0, \quad \mathrm{U} = 0$$

il polinomio $f(x)$ è divisibile per il trinomio $x^2 - 2r\cos\varphi\, x + r^2$ se $r\,\mathrm{sen}\,\varphi \gtrless 0$ e per il binomio $x - r\cos\varphi$ se $r\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0$. Ne viene che per dimostrare l'esistenza in $f(x)$ di un fattore lineare o quadratico, basterà dimostrare la possibilità di determinare il numero positivo r e l'angolo φ per modo che si annullino ad un tempo T e U. Ora se noi interpretiamo r e φ come coordinate polari nel piano [2], $\mathrm{T} = 0$ e $\mathrm{U} = 0$ saranno le equazioni di due curve algebriche d'ordine m (della seconda delle quali fa parte l'asse polare) e tutta la questione è ridotta a far vedere che queste curve si tagliano effettivamente. A tale scopo si osservi che la curva $\mathrm{T} = 0$ ha per asintoti m rette formanti coll'asse polare angoli multipli di $\frac{\pi}{m}$, mentre la curva $\mathrm{U} = 0$ ha per asintoti

---

(1) La quale fa vedere che, posto $x = \rho(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$, risulta $f(x) = \mathrm{T} + i\mathrm{U}$.

(2) Gauss a vero dire costruisce prima le superficie che in *coordinate cilindriche* sono rappresentate dalle equazioni $z = \mathrm{T}$ e $z = \mathrm{U}$ e poi ne considera le sezioni col piano $z = 0$; io ho soppresso questi due passaggi dal piano allo spazio e viceversa, chè non seppi persuadermi della loro utilità.

le rette analoghe corrispondenti agli angoli $\frac{(2k+1)\pi}{2m}$ $(k=0, 1, \ldots, m-1)$; oppure (volendo evitare qualunque considerazione in cui intervenga l'infinito) si dimostri che, descritto un cerchio con il centro nel polo e il raggio sufficientemente grande [1], in esso entreranno $2m$ rami della linea $T=0$ e altrettanti della $U=0$, per modo che due rami consecutivi della prima sono separati da un ramo della seconda. Tale essendo la rispettiva disposizione delle linee $T=0$ e $U=0$ [2] si può in vario modo (vuoi per via diretta, vuoi apagogicamente) convincersi che nell'interno del cerchio anzidetto avrà luogo almeno una intersezione di esse, epperò concludere la proposizione a cui erasi ricondotta la tesi da dimostrare.

9. Ritornando cinquant'anni dopo (n. XXX) [3] sulla prima dimostrazione del teorema fondamentale, volle Gauss trasformarla in modo che da essa emergesse l'esistenza, non di una sola, ma di tutte le radici dell'equazione in esame $f(x)=0$ [4] e questo anche nella supposizione che i coefficienti ne fossero complessi. Per raggiungere tale scopo egli pone

$$x = r(\cos\rho + i \operatorname{sen}\rho), \quad a_k = A_k(\cos\alpha_k + i \operatorname{sen}\alpha_k), \quad (k=1, 2, \ldots, m)$$

e

$$f\left[r(\cos\rho + i \operatorname{sen}\rho)\right] = T + iU;$$

e dimostra anzitutto che la radice positiva (unica) della seguente equazione

$$r^m - \sqrt{2}\,(A_1 r^{m-1} + A_2 r^{m-2} + \ldots + A_m) = 0$$

è un limite superiore pei moduli delle radici dell'equazione data. Quindi, preso per r un valore superiore a R, studia il contegno delle funzioni T e U quando ρ varia in uno dei $4n$ intervalli fra loro eguali,

---

(1) Come raggio di questo cerchio Gauss prende una lunghezza misurata da un numero superiore tanto a 1 quanto a $\sqrt{2}(|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_m|)$, ove, qui come in seguito, $|a|$ rappresenta il modulo o valore assoluto della quantità a.

(2) Queste curve godono molteplici proprietà che furono enunciate in parte da Gauss e dimostrate recentemente dal Walton nei lavori intitolati *Note on the Rhizic Curves*, *On the Spoke Aymptotes of the Rhizic Curves* e *On the Curvature of the Rhizic Curves in the multiple Points* (Quarterly Journal of Mathematics, T. XI, 1871).

(3) Cfr. anche la prima parte della nota del Valeriani antecedentemente citata.

(4) Egli aveva già adombrata la possibilità di questa trasformazione nella sua Dissertazione di Laurea.

nei quali suppone suddiviso l'intervallo fra $\rho = 0$ e $\rho = 2\pi$. Posto $\omega = \frac{\pi}{4m}$ e adottando le notazioni

$$F+,\quad F-,\quad F^{-}_{+},\quad F^{+}_{-}$$

per indicare che in un dato intervallo una funzione F di ρ è o sempre positiva o sempre negativa o positiva all'estremo inferiore e negativa al superiore, o viceversa, egli fa vedere che

$$\begin{array}{llll}
\text{per} & (8k-1)\omega \leqq \rho \leqq (8k+1)\omega & \text{si ha } T+ & \text{e } U^{+}_{-} \\
\text{»} & (8k+1)\omega \leqq \rho \leqq (8k+3)\omega & \text{»} \quad T^{-}_{+} & \text{»} \quad U+ \\
\text{»} & (8k+3)\omega \leqq \rho \leqq (8k+5)\omega & \text{»} \quad T- & \text{»} \quad U^{-}_{+} \\
\text{»} & (8k+5)\omega \leqq \rho \leqq (8k+7)\omega & \text{»} \quad T^{+}_{-} & \text{»} \quad U-
\end{array}$$

(ove k è uno qualunque dei numeri 0, 1, ..., $m-1$) e soggiunge (n. XXX, § 5): « Dalla successione dei valori positivi e negativi di T e U che ha luogo per ogni valore di r maggiore di R si può dedurre che entro il campo dei valori di r minori di R debbono accadere certi incrociamenti in quella distribuzione, i quali comprendono in sè la sostanza del teorema che dobbiamo dimostrare. Io esporrò i ragionamenti sotto una forma tolta dalla geometria di posizione perchè così essi raggiungono il grado massimo di semplicità e perspicuità. Ma in fondo il contenuto effettivo di tutta l'argomentazione appartiene ad un campo più elevato, indipendente dalle figure dello spazio, a una teoria astratta delle grandezze, gli oggetti della quale sono gli aggruppamenti di quantità succedentisi le une alle altre con continuità, ad un campo finora poco coltivato, ove non si può muoversi senza togliere a prestito un linguaggio basato sulla considerazione di figure geometriche » [1].

La sostanza dei ragionamenti geometrici annunciati da Gauss è la seguente:

Nel solito piano di rappresentazione dei numeri complessi si consideri un cerchio K avente per centro l'origine e un raggio $r > R$.

---

[1] Al lettore non isfuggirà certamente come nell'ultima parte del passo riportato Gauss alluda all'*Analysis situs* (cfr. questa *Rivista*, T. I. p. 107). Notisi poi come il passo stesso possa contribuire a vincere gli scrupoli di quelli che (ad es. il Peacock) non vogliono accogliere nell'Algebra le dimostrazioni del teorema fondamentale ove intervengano considerazioni geometriche; in tutte, queste considerazioni si potrebbero evitare, ma con sacrificio di brevità e di perspicuità.

L'insieme dei punti di questo piano ove è $T > 0$ si compone di parecchie parti ciascuna connessa, altrettanto dicasi pei punti in cui è $T < 0$; le prime regioni sono separate dalle seconde mediante linee ove è $T = 0$; la parte di piano esterno al centro K contiene m regioni della prima specie, fra le quali sono intercalate altrettante regioni della seconda. Ognuna di queste $2m$ regioni si prolunga nell'interno del cerchio K e forma delle nuove regioni, le quali possono avere o due o quattro o sei o un numero maggiore di linee di contorno; fra due limitrofe di queste porzioni si trova una linea su cui è $T = 0$. Se si tiene conto dei risultati dianzi ottenuti sui segni delle funzioni T e U, si conclude che ogni tale linea ha per origine un punto di K ove $U > 0$ e per termine un punto di K ove $U < 0$: onde, a cagione della continuità della funzione U, deve trovarsi su quella linea un punto ove è $U = 0$. Ivi si trova un punto-radice dell'equazione $f(x) = 0$ [1]. Questa ne possiede adunque m: l'ipotesi che alcune di esse coincidano non è esclusa da Gauss, il quale anzi si arresta ad esporre che cosa avvenga, sia nella funzione $f(x)$, sia nella figura che servì a dimostrare il teorema, allorchè si verifica questa speciale circostanza.

10. La dimostrazione succintamente esposta nel n. 8, venne di recente modificata dal Perott (n. LXIV) in un modo che, quantunque non segni un reale progresso sul ragionamento di Gauss, ha pure il diritto di venir qui menzionato.

Nell'equazione a coefficienti reali

$$X \equiv X(x) \equiv X(x,\ a_m) \equiv x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0$$

si sostituisca ad x il binomio $t + iu$ e si ponga

$$\frac{X(t+iu) + X(t-iu)}{2} = T \equiv T(x) \equiv T(x,\ a_m)$$

$$\frac{X(t+iu) - X(t-iu)}{2i} = U \equiv U(x) \equiv U(x,\ a_m)$$

e si considerino le due curve

$$T = 0, \quad U = 0.$$

Da una proprietà di esse scoperta da Gauss, emerge anzitutto che,

---

[1] Il ragionamento indicato potrebbesi fare eziandio considerando le linee che separano le regioni di K ove è $U > 0$ da quelle ove è $U < 0$ e mostrando che in ciascuna esiste un posto nel quale è $T = 0$. Si osservi anche come, nella prima esposizione della sua dimostrazione, Gauss abbia avuto bisogno di far uso di entrambe le linee $T = 0$, $U = 0$, mentre nella seconda ricorse a una sola.

chiamando A e B due valori reali di a_m tali che sia $A < B$, M il maggiore dei moduli di queste quantità, ed R l'unica radice positiva dell'equazione

$$r^m - \sqrt{2}\left(\mid a_1 \mid r^{m-1} + \mid a_2 \mid r^{m-2} + \ldots + \mid a_{m-1} \mid r + M\right) = 0 ,$$

l'equazione $X(x, a_m) = 0$, quando $A \leqq a_m \leqq B$ non possiede alcuna radice situata fuori di un cerchio avente per centro l'origine O e per raggio R. *Ammesso poi che la funzione* $T(x, A)$ *delle variabili reali* t e u *abbia un minimo*, si dimostra che, se $A > 0$ e l'equazione $X(x, A) = 0$ non ha radici in un certo cerchio di centro O è sempre possibile determinare una quantità positiva a tale che se $a < a_m \leqq A$ l'equazione $X(x, a_m) = 0$ non abbia ivi radici, mentre ne abbia una almeno l'equazione $X(x, a)$.

Ciò premesso, si faccia l'ipotesi che l'equazione $X(x, A) = 0$, ove $A > 0$, sia un'equazione priva di radici. Si potrà allora tracciare un cerchio di centro O con raggio abbastanza grande perchè nel suo interno non cada alcun punto radice di un'equazione del tipo $X(x, a_m) = 0$ ove $0 \leqq a_m \leqq A$.

L'equazione $X(x, A) = 0$ non avrà radici entro questo cerchio epperò si potrà determinare una quantità positiva a tale che l'equazione $X(x, a) = 0$ abbia una radice nel cerchio ma che altrettanto non accada per le equazioni $X(x, a_m) = 0$ ove $a < a_m \leqq A$. Il punto P del cerchio rappresenti una radice $x_1 = t_1 + iu_1$ dell'equazione, si ponga

$$X(z + x_1) = Z(z) = b_{m-n} z^n + b_{m-n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z^{m-1} + z^m$$

e si denoti con S l'unica radice positiva dell'equazione

$$n\sqrt{\frac{1}{2}} - (n+1)\left|\frac{b_{m-n-1}}{b_{m-n}}\right| s - (n+2)\left|\frac{b_{m-n-2}}{b_{m-n}}\right| s^2$$

$$- \ldots - (m-1)\left|\frac{b_1}{b_{m-1}}\right| s^{m-n-1} - m\left|\frac{1}{b_{m-n}}\right| s^{m-1} = 0 ,$$

e con M il massimo fra i moduli dei coefficienti di $Z(z)$. Si descriva una circonferenza avente per centro P e per raggio la più grande delle quantità S e $\dfrac{A - a}{M + A - a}$. Dalle ricerche di Gauss scaturisce l'esistenza su essa almeno di un punto (τ, υ) tale che ivi risulti

$$U(\tau, \upsilon) = 0 , \quad a - A < T(\tau, \upsilon, a) = -\varepsilon < 0 ,$$

epperò quella di una radice almeno dell'equazione $X(x, a + \varepsilon) = 0$. Ora tale radice dovrebb'essere nel nostro primo cerchio, il che contraddice con quanto si è prima visto. È falsa dunque l'ipotesi che la

equazione $X(x, a) = 0$ non abbia radici e il teorema è dimostrato. — Ma quali vantaggi offra sulla dimostrazione di Gauss, questo ragionamento che, oltre ad essere più complicato ed apagogico, presuppone che si sappia avere la funzione T un minimo, altri vegga.

11. Chi domandi qual sia l'idea madre della dimostrazione di Gauss che dianzi ci ha occupati, facilmente troverà per risposta che essa risiede nel sostituire l'equazione proposta con due equazioni a due variabili aventi coefficienti reali e da soddisfarsi mediante numeri reali. Questa trasformazione può effettuarsi — come fece Gauss — col porre nell'equazione proposta in luogo dell'incognita z la sua espressione trigonometrica, ma può anche operarsi col porre invece di z l'ordinario binomio $x + iy$. Inoltre, la possibilità di soddisfare alle due equazioni dedotte si può stabilire non solo — come fece Gauss — dimostrando l'esistenza di convenienti valori per le incognite, ma eziandio facendo vedere potersi far tendere simultaneamente a zero i primi membri delle equazioni anzidette. Entrambi questi cambiamenti si è proposti e ha realizzati il Dutordoir (n. LIII) (¹), senza però riferirsi in alcun modo alle ricerche di Gauss.

Egli suppone verificato il teorema per le equazioni di grado $n-1$ e vuole concluderlo per un'equazione di n^{esimo} grado $f(z) = 0$. Pone in $f(z)$, $z = x + iy$ e quindi, separando la parte reale dall'immaginaria, $f(x + iy) = \psi(x, y) + i\chi(x, y)$. Tenendo conto delle relazioni differenziali $\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\chi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\chi}{\partial x} = 0$, egli studia le variazioni simultanee subite dalle funzioni ψ e χ in causa di determinate variazioni delle x e y e conclude che, supposte non nulle le derivate parziali di quelle funzioni, facendo variare una sola variabile si faranno crescere ψ e χ nello stesso senso o in senso contrario a volontà; a seconda del segno degli incrementi della variabile, esse cresceranno o decresceranno entrambe se variano nello stesso senso e tenderanno l'una verso l'altra o si allontaneranno l'una dall'altra se variano in sensi opposti. Da tutto ciò egli desume potersi far tendere simultaneamente ψ e χ a zero e che, mentre ψ e χ tendono a zero, x e y tendono verso limiti determinati. E ciò è sufficiente per concludere il teorema fondamentale.

(¹) Cfr. anche la relazione fattane dal Mansion e pubblicata nel t. VII delle *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles.*

IV. *Dimostrazione di Argand.*

12. La prima dimostrazione rigorosa data da Gauss del teorema fondamentale dell'Algebra, perchè racchiusa in una modesta dissertazione di laurea stampata in una piccola città della Germania, ebbe pochissima diffusione nel mondo scientifico; all'estero specialmente essa passò quasi inosservata almeno finchè il suo inventore, salito intanto in alta fama di matematico eccellente, l'additò all'attenzione degli analisti in pubblicazioni posteriori. Niuna meraviglia dunque deve recare se la dimostrazione che ad essa segue immediatamente (¹) ne sia totalmente indipendente.

Alludiamo alla dimostrazione che R. Argand espose prima (1806) nel suo rinomato *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géometriques* e quindi (1813 e 1814) sotto migliore forma nei T. IV e V delle *Annales de Mathématiques* di Gergonne (n. VII, X e XI) (²). Essa ha il suo fondamento nella costruzione della linea poligonale che comincia nell'origine ed ha per lati consecutivi le rette rappresentatrici dei numeri complessi che sono, per un dato valore della variabile, i varî termini del primo membro della data equazione; e nel dimostrare che se per un certo valore della variabile, la linea poligonale non si chiude, si può far subire alla variabile stessa un cambiamento tale che il lato di chiusura sia nel secondo caso minore che nel primo. Da ciò Argand conclude la possibilità di ottenere una linea poligonale chiusa (cioè di ottenere per la variabile un valore soddisfacente l'equazione data) e sostiene l'esattezza di questa illazione benchè il Servois gli obbiettasse che: « Ce n'est point assez, ce me semble, de trouver des valeurs de x qui donnent au polynome

---

(¹) In ordine cronologico alla dimostrazione di Argand (nella sua forma più buona) precede a vero dire quella di Dubourget (n. IX), ma essa racchiude una petizione di principio prodotta da una confusione fra *funzione* e *funzione analitica*. Infatti dall'essere $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n$ segue che x è funzione di y, ma non già che sia $x = \varphi(a_0 a_1 \ldots a_n y)$, se con φ s'intende designare un complesso di operazioni algebriche. Ove però questa deduzione fosse lecita, si concluderebbe subito che ad ogni valore reale o complesso di y corrisponde un valore analogo di x e il teorema sarebbe dimostrato.

Si vegga la discussione fra Dubourget e Bret (*Annales de Mathémat.*, t. III, p. 33, 94 e 369; t. IV, p. 56 e 90) a cui diede luogo il paralogismo del primo.

(²) Le tre versioni del ragionamento di Argand leggonsi a pag. 38, 90 e 115 della seconda edizione del citato *Essai*.

des valeur sans cesse décroissant; il faut de plus que la loi du décroissement amène nécessairement le polynome à *zéro*, ou qu'elle soit telle que zéro ne soit pas, si l'on peut s'exprimer ainsi, *l'asymptote* du polynome » [1]. È questa, sotto altra forma, l'obbiezione che, come vedremo, venne mossa alla dimostrazione di Cauchy; quando sia tolta questa imperfezione col dimostrare l'esistenza di un minimo del lato di chiusura della linea poligonale anzidetta, si ottiene un'argomentazione a cui si darà o non la preferenza in confronto di altre più algebriche, secondochè si acconsenta a invocare oppure si aspiri ad evitare l'intervento di considerazioni geometriche [2].

V. *Osservazioni di Legendre e dimostrazioni che ne derivano.*

13. Benchè la questione di approssimare le radici di un'equazione, non abbia un significato determinato se non dopo che siasi dimostrata l'esistenza di tali radici nel campo dei numeri complessi, pure a Legendre toccò la singolare ventura di tracciare le prime linee di una dimostrazione del teorema fondamentale dell'Algebra appunto nello studiare l'anzidetta questione (n. VIII, 1ère partie, § XIV). Dal supporre l'assenza di solido fondamento a questa sua ricerca Legendre era così lontano che ne segnalò il risultato come uno dei più notevoli miglioramenti che la seconda edizione del suo *Essai sur la Théorie des nombres* offriva sul primo. Ma v'ha di più. Le parole di Legendre non contengono la minima allusione all'esistenza di persone che lo avessero preceduto in questa via, mentre da quanto fra poco esporremo emerge come Argand fosse una di esse. Questo silenzio e il fatto che a Legendre era stato comunicato manoscritto il lavoro di Argand [3], fece pronunciare da molti una condanna contro Legendre per plagio verso questo ultimo. I dati di fatto mancherebbero a chi volesse far annullare questa sentenza. Tuttavia a noi riesce difficile ammettere che colui il quale si affrettò a far conoscere i risultati ottenuti da Abel e Jacobi nella teoria delle funzioni ellittiche proclamandoli candidamente superiori di assai a quelli da lui raggiunti, i cui alti meriti scientifici erano fuori di questione fin dal 1808, abbia tentato, di deliberato proposito, di rapire a

---

(1) Op. cit. nella nota prec. p. 121.

(2) La migliore esposizione a me nota della dimostrazione di Argand è dovuta all'Hoüel (n. XLIII); essa è sostanzialmente identica a quella che indicò J. C. Fields (n. LXI); assai simile ad essa è quella di Transon (n. XXXVII), nella quale però i difetti segnalati nel testo in quella di Argand spiccano con evidenza ancora maggiore.

(3) Cfr. p. 77 e 91 della seconda edizione dell'*Essai* di Argand.

uno sconosciuto ciò che poteva servirgli come titolo alla gratitudine degli scienziati. Non è forse miglior consiglio il cercare una scusa al grande analista francese nell'osservazione di quanto frequentemente accada di ritenere come opera propria cosa che in realtà inconsciamente si ricorda, e nel rammentare l'opinione di Petrarca (se non erriamo) che una cosa non si può dir appresa finchè non sia divenuta siffattamente carne della nostra carne, sangue del nostro sangue, da avere perduto ogni traccia della sua origine?

Lasciando libero chi legge di far propria o respinger tale modo di vedere, noi daremo una breve notizia delle indagini di Legendre a cui testè alludemmo.

Nell'equazione proposta $f(z)=0$ si faccia la sostituzione $z=x+iy$ e se ne indichi con $P+iQ=0$ il risultato, ove P e Q sono funzioni reali delle variabili x e y; attribuiti a x e y dei valori particolari, si può indicare un facile procedimento per mezzo del quale trovare due incrementi da attribuirsi a x e y tali che il rapporto dei risultati della sostituzione in $f(z)$ del primitivo e del dedotto valore di $z=x+iy$ sia un numero arbitrariamente piccolo; applicando questo procedimento parecchie volte di seguito si troveranno per $f(z)$ dei valori aventi moduli sempre minori e che si accostano sempre più al valore zero; quando si sia raggiunto questo limite si sarà in possesso di un valore di z che annulla $f(z)$. Ma quale sia la ragione per cui a questo limite si debba di necessità arrivare, non vien detto da Legendre, il quale anzi era così lontano dal concepire la possibilità che si verificasse il caso opposto da ritenere le sue conclusioni valide anche quando $f(z)$ non fosse funzione algebrica (1).

14. Malgrado i gravi difetti di sostanza e di forma che deturpano l'argomentazione di Legendre (2) (difetti che al Peacock apparvero così gravi da renderlo dubbioso nell'accordarle il grado di dimostra-

(1) Il Foscolo ha consigliato (n. XXXV) alcune modificazioni da apportarsi alla dimostrazione di Legendre; esse però non la correggono dai difetti che aveva in origine e la faranno preferire solo da quelli che attribuiscono qualche importanza all'espulsione dall'Algebra delle funzioni trigonometriche.

(2) « À la vérité la démonstration que M. Legendre a donnée de cette proposition, et qu'il considère comme s'étendant à toute sorte d'équations algébriques ou transcendantes, paraît sujette à quelques difficultés; mais on peut les surmonter lorsque l'équation est algébrique dans tous les cas possibles, et lorsqu'elle devient transcendante, en apportant quelques restriction à la proposition dont il s'agit, comme je l'ai fait voir dans les *Leçons de Calcul différentiel* » Cauchy (n. XVII, p. 65).

zione) pure l'idea che la governa — cioè l'idea di porre in $f(z)$ per z una serie di valori capaci di far prendere a $| f(z) |$ dei valori sempre minori — è una di quelle non destinate a perire: ben se ne avvide Cauchy, il quale la collocò a sostegno della dimostrazione che porta ancora il di lui nome [1]. Fra questa e il ragionamento di Legendre, i più essenziali divarî stanno in ciò:

1° Mentre Legendre prende da principio per z un valore tale che in corrispondenza $| f(z) |$ assuma un valore vicino a zero, Cauchy lo suppone scelto in guisa che $| f(z) |^2$ acquisti il suo valore minimo;

2° Mentre Legendre confronta, facendone il quoziente, i valori di $f(z)$ corrispondenti a due valori di z, Cauchy confronta, facendone la differenza, i valori corrispondenti di $| f(z) |^2$;

3° Mentre Legendre dimostra che dal valore primitivo di z, sempre un secondo può dedursene per modo che il primo valore assunto da $f(z)$ stia in un rapporto assegnato col secondo, Cauchy fa vedere con un ragionamento di essenza apagogica, che il minimo di cui si è parlato dianzi non può essere differente da zero;

4° La dimostrazione di Cauchy a differenza di quella di Legendre, non contiene alcuna considerazione di infinitesimi, ciò che ne costituisce un pregio che, se è desiderabile sempre di evitarli, è quasi doveroso farlo quando si tratti di un tema a cui gl'infinitesimi sono estranei.

Per queste ragioni (e non per queste sole) la dimostrazione di Cauchy la vince su quella di Legendre: in un punto però essa è suscettibile di una critica gravissima [2], ove cioè si ammette che $| f(z) |^2$, funzione

---

(1) Essa venne esposta da Cauchy sotto tre forme diverse nei lavori n.i XIV, XV (p. 331) e XVII (§ 5): sotto quest'ultima forma venne riprodotta nelle *Leçons d'Algèbre* del Lefébure de Fourci (6ª ed. 1850, p. 312-330). L'ampia diffusione rapidamente raggiunta dalla dimostrazione di Cauchy (essa trovasi ancora oggi nella maggior parte dei trattati d'algebra) fece sì che alcuni attribuirono a Cauchy anche il teorema di cui ragioniamo (v. ad es. Choquet et Mayer, *Traité élémentaire d'Algèbre*, V édit. 1849, préface, p. VII): ma che ciò sia stato fatto senza sufficiente ragione, emerge dal fin qui detto.

(2) Secondo il Darboux (*Sur un théorème relatif à la continuité des fonctions*, Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, t. III, 1872, p. 307-313) fu O. Bonnet il primo che segnalò il punto debole della dimostrazione di Cauchy (del quale non erasi avveduto neppure Gauss) e a indicare che il modo di rimediarvi risiede nel teorema « ogni funzione algebrica razionale intera di due variabili reali a coefficienti reali e mai negativa ha un minimo ». Cfr. gli appunti analoghi fatti da Gauss alla dimostrazione di D'Alembert e da Servois a quella di Argand.

reale di due variabili reali, debba di necessità raggiungere un valore minimo. Ma anche di questa menda si può liberare invocando dei teoremi generali oggi notissimi (1).

Supposta accertata l'esistenza di un minimo di $|f(z)|^2$ il ragionamento di Cauchy è sotto ogni aspetto perfetto e ha, sopra molti altri, il vantaggio di applicarsi inalterato ad equazioni con coefficienti complessi (2).

Aggiungerò che Cauchy, mentre riconosce di avere attinto da Legendre i principî del suo ragionamento, dello scritto di Argand non fa cenno: tuttavia afferma l'Hoüel (3) che « Cauchy n'a fait que reproduire plus tard sous une forme plus analytique, mais moins saisissante » la dimostrazione di Argand! Probabilmente nel 1820 Cauchy non conosceva l'*Essai;* più tardi, avutone notizia, ne propugnò le idee coll'importante *Mémoire sur les quantités géométriques* (4), nel quale trovò posto anche l'argomentazione argandiana.

15. Ma l'essere il ragionamento di Cauchy fornito di doti così eminenti, non esclude la possibilità (anzi fa sorgere più vivo il desiderio) di renderlo in certe parti più semplice: donde le varie redazioni sotto cui venne presentato sia in trattati (5), sia in memorie speciali, delle quali per brevità ci limitiamo a far conoscere l'esistenza (n. XXVII e LXX) (6). Fra tutte, quella che emerge si legge nel *Cours d'Algèbre*

---

(1) « Una funzione di più variabili, data e continua in un campo finito e pei suoi punti-limiti, ammette i limiti superiore e inferiore finiti, ed assume effettivamente questi valori, ossia diventa massima e minima ». Genocchi-Peano, *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale*, 1884, p. 131. — Cfr. anche Thomae, *Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen* (1880, p. 82) e Du Bois-Reymond, *Die allgmeine Functionentheorie* (1882, p. 248).

(2) Cfr. le esposizioni fattene dal Thomae (op. cit. p. 88) e dallo Stolz (*Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, II Thl. 1886, p. 117).

(3) Nella prefazione alla 2a ed. dell'*Essai* di Argand.

(4) *Exercices d'Analyse et de Physique mathém.*, t. IV, 1847, p. 157-190.

(5) Cfr. Sturm nella citata opera di Choquet e Mayer (p. 396-402); Young nella *Theory and Solutions of Algebraical Equations of higher Order* (2a ed. 1843, p. 32-39); ecc.

(6) Però riguardo a quest'ultimo lavoro non posso tacere che esso non mi sembra contenere nulla di essenzialmente nuovo (per persuadersene lo si confronti con la dimostrazione di Cauchy come è riportata dal Balzer, *Elementi di Matematica*, trad. Cremona, parte III, 1875, p. 125) ed importante, giacchè come tale non riesco a considerare l'artificio con cui l'Amigues mascherò l'uso di funzioni trigonometriche.

supérieure del Serret e noi saremmo tentati di presentarla qui dinanzi agli occhi del lettore, se non fossimo distolti dal pensiero che quella classica opera è omai tanto diffusa che probabilmente non gli apprenderemmo cosa per lui nuova.

16. Oltre a questi secondarî mutamenti, uno essenziale subì la dimostrazione di Cauchy, mutamento che, tentato con mediocre successo dal Burg (n. XX) (1) e dal Sussmann (n. XXXII), fu condotto a buon termine in epoca a noi vicina dal Walton (n. XL): esso ha il proprio fondamento nell'applicazione alla $|f(z)|^2$, funzione reale di due variabili reali, del metodo insegnato dal Calcolo differenziale per determinare i valori massimi e minimi.

Taccio del tentativo fatto dal Sussmann per dimostrare l'esistenza di un minimo della funzione $|f(z)|^2$, chè l'essere questa funzione continua e sempre positiva non basta (come egli ritiene) per portare a questa conclusione. Dirò invece come egli ponga $z = \rho(\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi)$ e $|f(z)|^2 = A^2 + B^2$ ove A e B sono funzioni reali delle variabili reali ρ e φ. Ora la derivata di $|f(z)|^2$ rispetto a φ divisa (2) per ρ ha la forma $AC - BD$, mentre la derivata della stessa rispetto a ρ ha la forma $AD + BC$; onde pei valori di ρ e φ corrispondenti al minimo di $|f(z)|^2$ dev'essere

$$(1) \qquad AC = BD \qquad AD = -BC.$$

Secondo il Sussmann, moltiplicando membro a membro queste due equazioni si ricava $A^2 + B^2 = 0$. In realtà invece si ottiene $(A^2 + B^2)CD = 0$. Ora se $A^2 + B^2 = 0$ il teorema è dimostrato; se $C = 0$ e $D \gtrless 0$ le (1) dànno $A = 0$ e $B = 0$ cioè $A^2 + B^2 = 0$; lo stesso per $C \gtrless 0$ e $D = 0$; ma se fosse ad un tempo $C = 0$ e $D = 0$, le due derivate di $|f(z)|^2$ risulterebbero nulle ad tempo, senza che fosse $A = 0$ e $B = 0$. Affinchè dunque il ragionamento del Sussmann fosse conclusivo bisognerebbe ancora dimostrare o che C e D non possono annullarsi per una stessa coppia di valori reali di ρ e φ, o che tali valori non corrispondono a un minimo di $|f(z)|^2$, o che essi annullano anche A e B.

Del resto il tentativo del Sussmann non ha nemmeno il pregio della novità, giacchè esso era già stato fatto e con successo altrettanto infelice dal Burg. Il quale ammette senz'altro che, posto $z = \alpha + \beta i$, la funzione $Z = |f(z)|^2 = A^2 + B^2$ delle due variabili reali α, β debba

(1) Cfr. Matthiessen, op. cit., p. 12-14.
(2) È assai facile persuadersi che questa divisione è lecita.

di necessità possedere un valore minimo e trova che per esso devono avere luogo ad un tempo le equazioni

$$A\frac{\partial A}{\partial \alpha}+B\frac{\partial B}{\partial \alpha}=0 \qquad A\frac{\partial A}{\partial \beta}+B\frac{\partial B}{\partial \beta}=0\,.$$

Ora affinchè ciò abbia luogo devono coesistere le due equazioni

$$A=0\,, \qquad B=0\,,$$

tranne quando sia soddisfatta la

$$F(\alpha,\beta)\equiv\frac{\partial A}{\partial \alpha}\frac{\partial B}{\partial \beta}-\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{\partial B}{\partial \alpha}=0:$$

tutto dunque è ridotto ad escludere la possibilità di quest'ultima equazione. A tale scopo il Burg afferma potersi trovare un'infinità di coppie di valori α e β succedentesi con continuità e soddisfacenti l'equazione $F(\alpha,\beta)=0$, ed esclude che essi corrispondano a minimi di Z per il fatto che altrimenti questa ne avrebbe infiniti. Ma, anzitutto, come giustificare la prima affermazione senza invocare il teorema che si tratta di stabilire? e, in secondo luogo, l'essere Z funzione continua di α e β è forse inconciliabile colla possibilità di infiniti suoi minimi? Aggiungasi poi che α e β devon'essere quantità reali, epperò nulla abilita ad affermare che $F(\alpha,\beta)$ si debba annullare per infiniti di tali valori di α e β; e infatti per $F(\alpha,\beta)$ questo non può accadere, chè per essere

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha}=\frac{\partial B}{\partial \beta}\,, \qquad \frac{\partial A}{\partial \beta}+\frac{\partial B}{\partial \alpha}=0$$

si ha

$$F(\alpha,\beta)=\left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)^2=-\left\{\left(\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial B}{\partial \beta}\right)^2\right\},$$

quindi l'equazione $F(\alpha,\beta)=0$ si scinde nelle due

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha}=0 \qquad \frac{\partial A}{\partial \beta}=0$$

o nelle altre

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha}=0 \qquad \frac{\partial B}{\partial \beta}=0\,.$$

Perciò tutte le ragioni addotte dal Burg lasciano intatta la difficoltà di eliminare l'equazione $F(\alpha, b)=0$: sinchè essa non sia tolta l'argomentazione del Burg è priva di valore, e noi non ci saremmo arrestati

così a lungo su essa se essa non fosse stata accolta in un'opera recente di gran pregio, quella del Matthiessen [1].

Tale difficoltà fu poi vinta dal Walton che — senza avere conoscenza degli scritti di Burg e Sussmann — dimostrò direttamente che i valori di α e β soddisfacenti due epperò tutte le quattro equazioni precedenti non corrispondono a un minimo di Z.

17. All'obbiezione mossa dal Bonnet contro la dimostrazione di Cauchy si può sottrarsi, non soltanto coll'assodare in precedenza la necessaria esistenza di un minimo per $|f(z)|^2$, ma ancora insegnando un metodo per costruire una serie illimitata di numeri soddisfacenti alle due condizioni: 1° di tendere ad un limite determinato, 2° di far prendere a $|f(z)|^2$ valori sempre decrescenti fra i quali si possa trovarne uno minore di un numero prefissato ad arbitrio. Un metodo di tale natura fu scoperto dal Lipschitz (n. XLII, p. 248-282). Il quale, nella dimostrazione che ha proposto, seppe trar profitto dal fatto che il teorema fondamentale si può verificare direttamente per alcune equazioni (equazioni dei primi quattro gradi e equazioni binomie), per far vedere che quando lo si accolga come vero per equazioni di gradi inferiori a m bisogna ammetterlo anche per quelle di grado m. Per ciò egli considerò quella radice dell'equazione derivata $f'(z) = 0$ che fa

---

(1) Del resto questo non è il primo, nè l'ultimo, tentativo infruttuoso fatto dal Burg per dimostrare il teorema fondamentale dell'Algebra, chè fin dal 1830 egli aveva pubblicato un articolo (n. XVIII) di cui non possiamo dispensarci dall'additare le gravi mende. Esso comincia coll'osservazione che l'equazione ai quadrati delle differenze di un'equazione di grado $n = 2^k m$, m dispari, è in generale di grado $2^{k-1} m'$, m' dispari. Ne viene che se dall'equazione data si deduce una serie di equazioni ognuna delle quali abbia per radici i quadrati delle mutue differenze fra le radici della precedente, l'm^a di esse sarà di grado dispari e tutte avranno coefficienti reali supposti reali i coefficienti dell'equazione donde si è partiti. Questa deduzione successiva è soggetta alla stessa critica che colpisce le dimostrazioni di Eulero, De Foncenex, Lagrange e Laplace. Ma, ammesso pure che si possa dimostrare, senza usare in alcun modo il teorema da dimostrare, la relazione scambievole fra due qualunque equazioni della serie, il ragionamento del Burg conserverebbe un'altra gravissima imperfezione; infatti, per avere l'ultima equazione della serie una radice reale, nella penultima vi saranno due radici la cui differenza è un numero complesso: da ciò il Burg deduce essere quelle due radici entrambe complesse, senz'accorgersi di commettere così un errore pari a quello in cui incorrerebbe chi affermasse essere reali due numeri pel solo fatto che reale ne è la differenza. Questa svista ha tale gravità che essa ci dispensa dall'arrestarci più a lungo sul lavoro del Burg.

prendere al modulo di $\frac{f(z)}{a_0}$ (supposto $f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m$) un valore minore o eguale a quelli che gli fanno prendere le altre radici di $f'(z) = 0$; e col mezzo di essa costruì una serie infinita di numeri soddisfacenti alle due condizioni predette. Ma lo stabilire che tale serie può servire allo scopo pel quale venne fabbricata, è bisogna assai spinosa: sicchè se l'argomentazione dell'illustre analista di Bonn può dirsi perfettamente soddisfacente dal punto di vista del rigore, non sembra raggiungere il grado massimo di semplicità desiderabile ([1]).

Ad agevolarne l'intelligenza provvide il Mansion (n. XLVII), che in un notevole articolo la espose sotto forma più limpida e più metodica, evitando la risoluzione trigonometrica delle equazioni binomie che il Lipschitz presuppone; avvertiamo che chi volesse seguire l'egregio geometra belga nell'esporre la dimostrazione del teorema fondamentale dell'Algebra in un corso regolare e completo, potrebbe alleggerirla col destinare a più opportuna sede alcune considerazioni non strettamente legate colla proposizione di cui si ragiona e di portata assai più vasta.

18. La dimostrazione di Cauchy suggerisce spontaneamente l'enunciato di un problema importante. Essa infatti mette in chiaro l'esistenza di infiniti numeri ognuno dei quali fa prendere al modulo di $f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m$ un valore inferiore a quello che gli fa prendere il numero precedente; ma non insegna alcun procedimento mediante il quale si possano successivamente ottenere quei numeri: nella scoperta di questo procedimento risiede appunto il problema al quale dianzi alludemmo. Una prima soluzione di esso è inclusa nella dimostrazione del teorema fondamentale data dal Lipschitz. Un'altra — fondata sul metodo di approssimazione di Newton — fu indicata dal Mertens (n. LXVII) pel caso in cui l'equazione $f(z) = 0$ non abbia radici multiple ed i suoi coefficienti $a_0\ a_1 \ldots a_m$ siano numeri complessi razionali ([2]). Per chiarirne il concetto, avvertiamo anzitutto che dato ad arbitrio un polinomio intero

$$F(z) = c_0 z_n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n\,,$$

noi indicheremo con

$$F_0(z) = g_0 z_n + g_1 z^{n-1} + \ldots + g_n$$

([1]) Secondo quanto si legge nel t. XIX, p. 70, del *Jahrbuch über die Forschritte der Mathematik* l'articolo del Juel (n. LXV) contiene cose assai simili alla dimostrazione del Lipschitz.

([2]) È noto che un ordinario numero complesso $x + iy$ dicesi intero o razionale quando sono interi o risp. razionali i due numeri reali x e y.

un polinomio di egual grado i cui coefficienti siano i più piccoli numeri interi positivi soddisfacenti le condizioni

$$| c_i |^2 \leqq g_i ;$$

di più indicheremo con φ e ψ le due funzioni intere (a cui guida la ricerca del massimo comun divisore fra la funzione f e la sua derivata f') soddisfacenti la seguente equazione

$$\varphi f + \psi f' = 1 ;$$

indicheremo finalmente con g il minimo intero positivo il cui quadrato non è superato da alcuna delle quantità $| a_i |^2$ e porremo $g + 2 = h$. Ciò premesso, suppongasi di conoscere un valore complesso razionale w che renda

$$(2) \qquad | f(w) | \leqq \frac{9}{91\, \psi_0(h)[\varphi_0(h) f_0'(h) + \psi_0(h) f_0''(h)]} ,$$

e si ponga

$$-\frac{f(w)}{f'(w)} = \alpha + i\beta + \gamma + i\delta , \quad w + \alpha + i\beta = w_1$$

ove α, β, γ, δ devono essere scelti con tante cifre decimali da aversi

$$\alpha\gamma \geqq 0 , \quad \beta\delta \geqq 0 , \quad \gamma^2 + \delta^2 \leqq \frac{1}{4.10^2} (\alpha^2 + \beta^2) ;$$

risulterà allora

$$| f(w_1) | < \frac{1}{10} | f(w) | .$$

Si ponga similmente

$$-\frac{f(w_1)}{f'(w_1)} = \alpha_1 + i\beta_1 + \gamma_1 + i\delta_1 , \quad w_1 + \alpha_1 + i\beta_1 = w_2$$

colle condizioni

$$\alpha_1\gamma_1 \geqq 0 , \quad \beta_1\delta_1 \geqq 0 , \quad \gamma_1^2 + \delta_1^2 \leqq \frac{1}{4.10^4} (\alpha_1^2 + \beta_1^2) ;$$

risulterà in conseguenza

$$| f(w_2) | < \frac{1}{10^2} | f(w_1) | < \frac{1}{10^3} | f(w) | .$$

Come da w si passò a w_1 e da questo valore a w_2, si potrà passare da w_2 a un valore w_3, da questo a un w_4, ecc. Il valore generico w_r a cui per tal modo si giunge è tale che

$$| f(w_r) | < \frac{1}{10^{2^r} - 1} | f(w) | .$$

Ciò è sufficiente a dimostrare come nelle cose dette sia racchiusa una soluzione del problema enunciato in principio di questo numero. Ora si osservi che quanto precede conduce a concludere il teorema fondamentale: basta per ciò avere accertato che vi è un valore complesso razionale w che soddisfi alla condizione (2). Questa verificazione viene realmente fatta dal Mertens; il suo ragionamento, di natura apagogica, è assai intricato, e se l'avere egli saputo arrivare alla mèta attraverso a una selva selvaggia e aspra e forte di diseguaglianze complicate, dimostra la sua non comune oculatezza, è tuttavia legittimo il desiderio di trovare qualche altra via meno disagiosa che meni allo stesso scopo: e questa aspirazione sembra tanto più ragionevole inquantochè la ricerca del Mertens non porta in fronte quello stigma di necessità che hanno altre investigazioni e che spegne la fiducia di condurle altrimenti.

VI. *Seconda dimostrazione di Gauss e trasformazioni di essa.*

19. I tentativi fatti da Eulero, De Foncenex, Lagrange e Laplace per dimostrare il teorema fondamentale, quantunque non coronati da buon successo, racchiudono tuttavia delle idee da cui potevasi trarre qualche frutto: Gauss stesso, che con sagacia straordinaria seppe metterne allo scoperto la deficienza, vide tosto come il difetto comune a tutte quelle dimostrazioni non fosse inevitabile.

Il carattere comune a tutte è di reggersi sulla deduzione dall'equazione proposta di un'equazione avente almeno una radice in evidenza; l'errore comune a tutte consiste in ciò che tale equazione viene ottenuta e le sue proprietà vengono stabilite considerando le radici dell'equazione primitiva, presupponendo cioè appunto il teorema da dimostrare. A fine di renderle inattaccabili è d'uopo trovare un espediente che permetta di ottenere quell'equazione e le sue proprietà senza il sussidio delle anzidette radici. La ricerca di esso espediente è problema estremamente arduo, degno dell'eccelsa mente di Gauss, il quale seppe scioglierlo introducendo nella Scienza le *quantità indeterminate* [1], come si apprende dalla celebre memoria intitolata: *Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse* (n. XII).

Questa si apre con una prima ricerca preparatoria, che fu feconda di risultati anche in altre questioni; è l'estensione alle funzioni razionali

[1] Sull'importanza di questo concetto, si veggano le parole del Molk, *Acta mathematica*, t. VIII, 1884, p. 5.

intere di una variabile delle antiche ricerche di Euclide sulla divisibilità dei numeri interi e sul massimo comun divisore di due tali numeri; l'intimo legame fra tale generalizzazione e la teoria che ci occupa riuscirà manifesto a chiunque ricordi che il dimostrare l'esistenza delle radici di un'equazione algebrica equivale a dimostrare l'esistenza di fattori nel suo primo membro.

Dopo questa, Gauss istituisce una seconda ricerca preliminare, concernente le funzioni simmetriche di più quantità indeterminate $a, b, c...$ Egli dimostra anzitutto che, posto

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots = x^m - \lambda' x^{m-1} + \lambda'' x^{m-2} - \ldots$$

ogni funzione delle $\lambda', \lambda'', \ldots$ sarà funzione simmetrica delle $a, b, c, \ldots$ La proposizione reciproca è pure vera e viene enunciata da Gauss nel modo seguente: data una funzione intera simmetrica ρ delle indeterminate $a, b, c, \ldots$ si può trovare una e una sola funzione di altrettante indeterminate $l', l'', \ldots$ tale che con le sostituzioni $l' = \lambda', l'' = \lambda'', \ldots$ si riduca a ρ.

Fra le funzioni simmetriche delle $a, b, c, \ldots$ è considerevole il prodotto π delle loro $m(m-1)$ differenze. Esso può esprimersi in funzione delle $\lambda' \lambda''\ldots$; se nell'espressione risultante si fanno le sostituzioni $\lambda' = l', \lambda'' = l'', \ldots$ nascerà una funzione p che Gauss denomina *determinante* della funzione

$$y = x^m - l' x^{m-1} + l'' x^{m-2} + \ldots$$

Nello stabilire la nozione di determinante è opportuno riguardare i coefficienti di y come quantità indeterminate; il determinante P di una funzione determinata

$$\mathrm{Y} = x^m - \mathrm{L}' x^{m-1} + \mathrm{L}'' x^{m-2} + \ldots$$

è un numero determinato il quale si ottiene facendo in y le sostituzioni $l' = \mathrm{L}', l'' = \mathrm{L}''$..... L'importanza del determinante p di una funzione y deriva dal fatto che il suo annullarsi è la condizione necessaria e sufficiente affinchè y e la sua derivata y' abbiano un fattore comune: il dimostrare questa proposizione senza presupporre l'esistenza delle radici dell'equazione $y = 0$, offre difficoltà enormi su cui Gauss riuscì vittorioso, non senza avere sostenuto una lotta accanita: un primo risultato di questa vittoria è la certezza che una funzione a determinante nullo è decomponibile in fattori d'ordine inferiore. Per dimostrare che l'ipotesi dell'annullarsi del determinante di una funzione non è indispensabile per giungere a questa conclusione, Gauss introduce una nuova funzione ausiliare, simmetrica nelle $a, b, c, \ldots$ e dipendente

inoltre da due nuove indeterminate u, x; è dessa il prodotto ζ delle $\frac{m(m-1)}{2}$ quantità analoghe alla $u-(a+b)x+ab$: siccome ζ si può esprimere in funzione algebrica razionale intera delle $\lambda'\ \lambda''...$, porremo

$$\zeta = f(u, x, \lambda', \lambda''...)$$

e chiameremo z o Z quello che essa diviene in virtù delle sostituzioni $\lambda' = l'$, $\lambda'' = l''$, ... o $\lambda' = L'$, $\lambda'' = L''...$, inoltre per brevità faremo

$$f(u, x, L', L'', ...) = F(u, x).$$

Ciò premesso, siccome il determinante P di Z, funzione di u, è una funzione non identicamente nulla dell'indeterminata x, così il numero dei valori di x che rendono $P=0$ non sarà infinito e si potrà assegnare ad x un valore X (che anzi possiamo ritenere reale) tale che il determinante di $F(u, X)$ non sia nullo; allora $F(u, X)$ e $\frac{dF(u, X)}{du}$ non avranno fattori comuni. *Supponiamo* poi che per $u = U$, $F(u, X)$ si annulli; $F(u, X)$ avrà quindi il fattore $u - U$ e la derivata $\frac{dF(u, X)}{du}$ prenderà per $u = U$, un certo valore $U' \gtrless 0$. U' non è altro che il valore di $\frac{dZ}{du}$ per $x = X$ e $u = U$; chiamiamo X' il valore di $\frac{dZ}{dx}$ per gli stessi valori di x e u. Si può allora dimostrare che Z è divisibile per $u + \frac{X'}{U'}x - \left(U + \frac{XX'}{U'}\right)$; ne viene che, posto $u = x^2$, $F(x^2, x)$ è divisibile per $x^2 + \frac{X'}{U'}x - \left(U + \frac{XX'}{U'}\right)$ epperò è nulla pei valori di x che sono radici di questo quadrinomio; ora questi sono reali o complessi; d'altronde $F(x^2, x) = Y^{m-1}$: dunque esiste un valore reale o complesso di x soddisfacente l'equazione $Y = 0$.

A questa conclusione si pervenne facendo l'ipotesi che esista un valore U di u capace di annullare $F(u, X)$; ora $F(u, X) = 0$ è, come la $Y = 0$, un'equazione a coefficienti reali ed ha per grado $\frac{m(m-1)}{2}$; inoltre se m è della forma $2^r k$, k dipari, $\frac{m(m-1)}{2}$ sarà della forma $2^{r-1}k$: da ciò emerge che in sostanza si accettò come vero il teorema per una equazione il cui grado abbia la forma $2^{r-1}k$ e se ne concluse la verità per una il cui grado abbia la forma $2^r k$ (k e k' dispari); ma esso è noto per un'equazione a coefficienti reali di grado dispari, onde è vero per ogni equazione a coefficienti reali.

Quale grado di originalità possieda quest'argomentazione, si desume da quanto già dicemmo intorno alla sua origine e a' suoi precedenti; e qual valore abbia risulta dal fatto che, mentre da un lato niuno seppe scoprire qualche punto degno di critica, numerose sono le investigazioni di cui ivi trovasi il seme o la radice. Ma la dote di essere logicamente perfetta non equivale a quella di essere intelligibile a tutti: e poichè questa qualità non appartiene certo alla memoria di Gauss ora discorsa ([1]), molti tentativi vennero fatti per abbellirnela; e se il numero e il valore dei commentatori di uno scritto possono servire di misura dell'importanza di esso, in grandissima estimazione deve tenersi uno a cui fanno corteggio le importanti scritture di cui ora parleremo.

20. La prima in ordine di tempo è dovuta a Staudt (n. XXVIII). Quale trasformazione Staudt abbia fatta subire alla dimostrazione di Gauss si scorge esaminando gli enunciati dei teoremi che — col metodo sintetico sempre preferito dall'*Euclide del nostro secolo* — egli successivamente dimostra, dopo avere riprodotte e completate le osservazioni fatte da Gauss sulle funzioni simmetriche di più quantità. L'ultimo di questi enunciati suona così:

« Per ogni funzione intera di x, $\varphi(x)$, di grado $n > 1$ si può trovare una funzione intera di u, $f(u)$, di grado $\frac{n(n-1)}{2}$ tale che per qualunque valore di u che annulla $f(u)$, le funzioni $\varphi(u+x)$ e $\varphi(u-x)$ abbiano un fattore comune; il massimo comun divisore $\vartheta(x)$ di queste funzioni è della forma $F(x^2)$ o $xF(x^2)$, F essendo il simbolo di una funzione intera razionale ».

Ora si osservi che il grado di qualunque funzione intera può scriversi sotto la forma $(2p+1)2^q$, ove p e q sono numeri interi non negativi. Se r rappresenta un determinato numero intero positivo e se qualunque equazione ove $q > r$ si può risolvere, allora, dal momento che ogni equazione quadratica è risolubile si potrà risolvere anche ogni equazione $\varphi(x) = 0$ ove sia $q = r$. Infatti se si suppone che il grado n di $\varphi(x)$ sia divisibile per 2^r ma non per 2^{r+1}, $\frac{n(n-1)}{2}$ non sarà di-

---

([1]) A dimostrarlo può bastare il fatto che il Peacock dopo averne parlato soggiunge (n. XXI, p. 303 nota): « I do not venture to speak more decidedly; for through I have read it entirely through several times with great care, I do not retain that distinct and clear conviction of the essential connexion of all its parts which is necessary to compel assent to the truth of a demonstration ».

visibile per 2^r e quindi è possibile la risoluzione dell'equazione $f(u)=0$. Ne sia h una radice e $\vartheta(x)$ il massimo comun divisore di $\varphi(h+x)$ e $\varphi(h-x)$. Allora: 1° se $\vartheta(x)=x\mathrm{F}(x^2)$, h è radice di $\varphi(x)=0$; 2° se $\vartheta(x)=\mathrm{F}(x^2)$ e in $\mathrm{F}(x)$ è $q<r$, per avere una radice di $\varphi(x)=0$ basta trovarne prima una c di $\mathrm{F}(x)=0$ e poi una di $x^2=c$; 3° se finalmente è $\vartheta(x)=\mathrm{F}(x^2)$ e in $\mathrm{F}(x)$ q non è minore di r, si sostituisca all'equazione primitiva l'analoga ma più semplice $\dfrac{\varphi(x)}{\vartheta(x)}=0$, ove è pure $q=r$; ripetendo parecchie volte di seguito lo stesso procedimento si arriverà a una radice di $\varphi(x)=0$.

Facendo r successivamente eguale a 1, 2, 3, ... si concluderà che ogni equazione della forma $\mathrm{X}+i\mathrm{Y}=0$ si può risolvere, ove si possa risolvere ogni equazione di egual forma e di grado dispari; ora quest'ultima possibilità si dimostra (supponendola verificata al modo solito per equazioni a coefficienti reali) con un ragionamento semplice col quale Staudt è riuscito ad estendere la portata della seconda argomentazione Gaussiana alle equazioni algebriche con coefficienti complessi: è questo un risultato importante, che val la pena di essere rilevato.

21. Azione ancora più semplificatrice sulla seconda dimostrazione di Gauss ebbero gli studî del Gordan (n. XLI) [1]. Il quale propose che si cominciasse dal definire il *risultante di due funzioni algebriche razionali intere* di una stessa variabile x mediante la sua espressione in determinante, che si ottiene d'ordinario applicando il metodo dialitico di Sylvester, mostrando la convenienza di tale proposta col far vedere come da questa definizione si potesse dedurre essere l'annullarsi del risultante condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un fattore (funzione di x) comune alle due funzioni date.

Allora se l'equazione data $f(x)=0$ è di grado m, a coefficienti reali, il primo dei quali sia 1, si ponga

$$f(x+u)=f(x)+u\mathrm{P}(x,u),$$

e si calcoli il risultante R delle due funzioni di x $f(x)$ e $\mathrm{P}(x,u)$: R sarà in u del grado $m(m-1)$, 1 essendo il coefficiente di $u^{m(m-1)}$ R si potrà considerare come risultante di $f(x+u)$ e $\mathrm{P}(x,u)$, ossia di $f(x)$ e di $\mathrm{P}(x-u,u)=\mathrm{P}(x,-u)$. Quindi R conterrà solo potenze pari di u e sarà in u^2 di grado $\dfrac{m(m-1)}{2}$. Se quindi si eguaglia R a zero

[1] Cfr. anche Kerschensteiner *Dr. Paul Gordan's Vorlesungen über Invariantentheorie* (I Bd. 1885, p. 166-174).

si ottiene un'equazione di grado $\frac{m(m-1)}{2}$. Supposto $m = 2^{v}k$, k dispari, sarà $\frac{m(m-1)}{2} = 2^{v-1}(2^{v}k - 1)$, cioè il grado dell'equazione $R = 0$ contiene il fattore 2 una volta di meno del grado dell'equazione $f(x) = 0$: da ciò con ragionamenti analoghi a quelli che hanno servito a Gauss e a Staudt si deduce la verità del teorema per qualsivoglia equazione a coefficienti reali.

22. Confrontando accuratamente la dimostrazione di Gauss con quella di Gordan si vede che l'idea di Gauss che Gordan ha specialmente utilizzata è quella dell'introduzione di una certa funzione ausiliaria $F(u, x)$ di due indeterminate avente la proprietà che quando l'equazione $F(x, u) = 0$ si può risolvere rispetto a u la proposta lo si può rispetto a x; e si scorge che la causa della semplificazione consiste nell'avere sagrificato un po' della generalità dell'argomentazione di Gauss per ottenere una grande (forse insuperabile) semplificazione [1]. Ma una semplificazione di altra natura può arrecarsi al ragionamento di Gauss, col servirsi cioè di un'equazione risolvente che riesca di grado dispari qualunque sia il grado m dell'equazione proposta, chè allora dalla risolubilità della risolvente scaturisce tosto quella dell'equazione proposta.

Or bene il König ha insegnato (n. XLVI) a trovare, qualunque sia il numero $r < m$, una risolvente di grado $\binom{m}{r}$; ne viene che, se $m = 2^{v}k$, k dispari, e si prende $r = 2^{v}$ la risolvente è (come si vede agevolmente) di grado dispari, e il teorema fondamentale si conclude tosto; che se invece fosse $m = 2^{v}$, si prenderebbe $r = 2^{v-1}$ e si concluderebbe la decomponibilità del primo membro dell'equazione data in due fattori di grado 2^{v-1}, applicando a questi lo stesso ragionamento e così continuando si arriverebbe ai fattori quadratici del primo membro dell'equazione data.

23. Ma il teorema fondamentale nel caso generale si può dedurre, supponendolo vero per equazioni di grado dispari, battendo una via

---

(1) Mentre Gauss si serve di una risolvente avente radici della forma $pab + q(a + b) + r$, ove a e b sono radici dell'equazione data, e p, q e r sono costanti qualisivogliano, la risolvente di Gordan ha per radici le differenze mutue fra le radici di detta equazione o i loro quadrati. Staudt adopera invece come risolvente l'equazione *alle* semisomme delle radici della equazione proposta.

diversa da quella or ora tracciata e che offre il vantaggio di non presentare la biforcazione che s'incontra in un certo punto di quella del König. Tale via, che venne indicata dal Netto (n. XLVIII), parte da un teorema appartenente alla teoria delle sostituzioni. Per delinearne l'andamento, poniamo

$$\Lambda = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) = x^n - \lambda_1 x^{n-1} + \lambda_2 x^{n-2} - \dots$$
$$y = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n ;$$

supposte tanto le a quanto le α tutte distinte permutando fra loro le α in tutti i modi possibili, y acquisterà $n!$ valori che indicheremo con y_μ ($\mu = 1, 2, \dots, n!$); essi saranno radici di un'equazione

$$\Delta(x) \equiv \Delta \equiv x^{n!} - \delta_1 x^{n!-1} + \delta_2 x^{n!-2} - \dots = 0$$

i cui coefficienti saranno funzioni razionali delle λ e delle α. Posto ora $n! = 2^r\sigma$ (σ dispari) e $2^r = \rho$ si può (applicando il teorema sopra citato) trovare una funzione z delle a e delle α avente σ valori determinati da una equazione

$$\Gamma(z) \equiv \Gamma \equiv z^\sigma - \gamma_1 z^{\sigma-1} + \gamma_2 z^{\sigma-2} - \dots$$

i cui coefficienti siano razionali nelle α e nelle λ e tale che si abbia

$$\Delta \equiv \prod_{\nu=1}^{\nu=\sigma} \Phi(x, z_\nu)$$

ove $$\Phi(x, u) = x^\rho - \varphi_1(u) x^{\rho-1} + \varphi_2(u) x^{\rho-2} - \dots$$

Si dimostra allora che si può scrivere

$$\Delta(x) = \Phi(x, u) + \Gamma(u)\,\Omega(x, u)$$

Ω essendo, come Γ, funzione intera delle α e λ. Applicando ora alcune osservazioni di Gauss sulle quantità indeterminate, da questa identità ne scaturisce un'altra

$$D(x) = F(x, u) + G(u)\,O(x, u)$$

ove si ponga:

$$L \equiv x^n - l_1 x^{n-1} + l_2 x^{n-2} - \dots$$
$$D \equiv x^{n!} - d_1 x^{n!-1} + d_2 x^{n!-2} - \dots$$
$$G \equiv x^\sigma - c_1 x^{\sigma-1} + c_2 x^{\sigma-2} - \dots$$
$$F \equiv x^\rho - f_1 x^{\rho-1} + f_2 x^{\rho-2} - \dots$$

e s'intenda che $l_1 \dots l_n$ siano quantità arbitrarie, che $d_k\ c_k\ f_k$ siano quantità composte colle l come $\delta_k\ \gamma_k\ \varphi_k$ lo erano colle λ e $O(x, u)$ dipenda da quelle come $\Omega(x, u)$ dipende da queste.

Ora $G(u) = 0$ è di grado dispari; supponendo nota l'esistenza di una sua radice u_1, l'identità precedente diverrà $D(x) = F(x, u_1)$. D'altronde $F = 0$ è un'equazione di grado $\rho = 2^r$ che (sempre pel teorema dianzi citato) ammette le radici $x_1\, x_2 \ldots x_\rho$: chiamandone x_λ una qualunque, l'identità precedente darà $D(x_\lambda) = 0$; ma facendo in particolare $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ risulta $D(x) = L(x)^{(n-1)!}$ onde è $L(x_\lambda) = 0$, epperò l'equazione $L(x) = 0$ — che è un'equazione di grado n qualunque — ha radici c. d. d.

24. Oltre alle indicate dimostrazioni del teorema fondamentale che Staudt, Gordan, König e Netto seppero far sgorgare dai principî posti da Gauss, un'altra dobbiamo citarne, altrettanto se non maggiormente importante e che ripete origine non dissimile: è quella che il Kronecker cominciò ad esporre nel semestre d'inverno 1870-1871 all'Università di Berlino. Per farla conoscere chiaramente qui sarebbe indispensabile che noi esponessimo la maggior parte delle definizioni e i più essenziali principî della nuova teoria aritmetica che per le quantità algebriche ha costruita quel grande scienziato: e ciò ne obbligherebbe ad entrare in particolari minuti, inconciliabili con la natura e le proporzioni di questo modesto scritto. Onde ci è forza rimandare il lettore per precise informazioni intorno alla dimostrazione di Kronecker alla memoria (n. XLIX) che egli pubblicò per festeggiare il giubileo dottorale di Kummer. Questa nostra brevità è tanto più giustificata perchè gli studî del Kronecker menano a una seconda dimostrazione tuttora (e speriamo ancora per poco) inedita, la conoscenza della quale è indispensabile per avere un'idea completa dell'aspetto sotto cui l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche appare dal punto di vista in cui si è collocato il citato geometra.

VII. *Terza dimostrazione di Gauss.*

25. Ad un pensiero diverso e totalmente originale deve la vita la terza delle dimostrazioni scoperte da Gauss pel teorema fondamentale (n. XIII), la quale offre una delle applicazioni di maggior rilievo del Calcolo integrale all'Algebra. Essa ha il proprio fondamento nel ben noto teorema che insegna potersi in un integrale doppio invertire l'ordine delle integrazioni quando la funzione da integrarsi si conservi continua e finita nel campo d'integrazione.

Supposto essere $Z = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m$ il primo membro del-

l'equazione proposta, a coefficienti reali, si faccia $z = \rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$ e si supponga risultare $X = t + iu$; si ponga inoltre

$$t' = \frac{\partial u}{\partial \omega} = \rho \frac{\partial t}{\partial \rho}, \quad u' = -\frac{\partial t}{\partial \omega} = \rho \frac{\partial u}{\partial \rho}$$

$$t'' = \frac{\partial u'}{\partial \omega} = \rho \frac{\partial t'}{\partial \rho}, \quad u'' = \frac{\partial t'}{\partial \omega} = -\rho \frac{\partial u'}{\partial \rho}.$$

Allora, attribuendo a ρ un valore R maggiore della massima fra le quantità

$$\sqrt[i-1]{m \mid a_i \mid \sqrt{2}} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

qualunque sia ω la funzione $tt' + uu'$ risulterà positiva. E se si considera la quantità

$$\Omega = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{(t^2 + u^2)(tt'' + uu'') + (tu' - t'u)^2 - (tt' + uu')^2}{\rho(t^2 + u^2)^2}$$

e si eseguisce l'integrazione prima rispetto a ω e poi rispetto a ρ si trova essere $\Omega = 0$; se invece le integrazioni si eseguiscono in ordine opposto si conclude essere $\Omega > 0$. Per spiegare questa contraddizione non v'ha altro mezzo che supporre di avere invertito l'ordine delle due integrazioni senz'averne il diritto; ne viene che nel campo d'integrazione la funzione da integrarsi deve divenire infinita, epperò deve esistere per ρ e ω una coppia di valori che rendono nulle t e u, epperò anche $t + iu$ cioè Z. Così non solo il teorema è dimostrato, ma si è trovato un limite superiore (R) pei moduli delle radici dell'equazione $X = 0$.

26. Con questo ragionamento offre qualche analogia il seguente di data assai più recente (n. LI).

In Z si ponga $z = x + iy$ e si supponga risultare $Z = X + iY$. X e Y saranno funzioni algebriche razionali intere di x e y dotate della seguente proprietà: dato un numero reale positivo A, grande ad arbitrio, se ne può sempre trovare un secondo R tale che per ogni coppia di valori di x e y, per cui è $x^2 + y^2 \geqq R^2$, risulti $X^2 + Y^2 > A$.

Ciò posto si supponga che *non* esista alcun valore di $z = 0$ per cui sia ad un tempo $X = 0$ e $Y = 0$. Allora la funzione $w = \log(X^2 + Y^2)$ avrà le seguenti proprietà: 1ª Sarà monodroma e continua, e ammetterà derivate parziali rispetto a x e y che pure saranno sempre monodrome

e continue; 2ª Soddisfarà all'equazione differenziale $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$. Per conseguenza il valore della funzione in un punto (x_0, y_0) sarà la media dei valori che essa prende sulla periferia di un cerchio avente il centro in quel punto; sarà quindi [1]

$$w(x_0, y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(x_0+R\cos\varphi,\ y_0+R\,\mathrm{sen}\,\varphi)d\varphi.$$

Ora il primo membro ha un valore determinato, mentre nel secondo noi possiamo prendere R così grande che, qualunque sia φ, $w(x_0+R\cos\varphi,\ y_0+R\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ cioè $\log(X^2+Y^2)$ risulti maggiore di qualunque numero dato. Dunque l'eguaglianza precedente è impossibile, assurda è l'ipotesi dell'inesistenza di valori di x e y che annullino ad un tempo x e y, e il teorema provato.

VIII. *Dimostrazione di Mourey.*

27. Fra i molti sistemi fra loro più o meno differenti, che in varie epoche e in paesi diversi, vennero proposti per togliere, mediante opportune rappresentazioni geometriche, le oscurità offerte dalla teoria dei numeri complessi, uno dei più notevoli è senza alcun dubbio quello che venne fatto conoscere nel 1828 da C. V. Mourey coll'opuscolo intitolato: *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires dédié aux amis de l'évidence.* Benchè oggi la natura dei numeri complessi sia così bene conosciuta che un'interpretazione geometrica può servire, non già a chiarire dei punti dubbî, ma solo ad agevolare il concepimento o l'esposizione di nozioni o ragionamenti algebrici; benchè quindi gli *amici dell'evidenza* possano formarsi un'idea precisa delle quantità imaginarie senza invocare il soccorso di artificiose illustrazioni geometriche; pure l'opuscolo del Mourey dev'essere consultato da chiunque voglia prendere conoscenza diretta di un modo originale tanto di enunciare quanto di risolvere la questione dell'esistenza di radici nelle equazioni algebriche [2]. E che questo modo sia degno di encomio viene dimostrato dal fatto che Liouville, il quale si schierò piuttosto fra gli oppositori che fra i fautori delle idee del Mourey, pure credette opportuno di contribuire a che

(1) Riemann, Inaugural-Dissertation, art. 10 (*Gesammelte Werke*, 1876, p. 20).

(2) V. p. 76-74 della 2ª ed. di esso.

si salvasse dall'oblio la dimostrazione che nel citato scritto si legge del teorema fondamentale dell'Algebra, esponendola (n. XXV) sotto forma accessibile a tutti e accettabile anche da coloro che erano riluttanti a concedere a quelle idee un posto stabile nella Scienza. E noi nel fare ora nota, nelle sue linee generali, l'argomentazione moureyana, seguiremo l'esempio del grande geometra francese, e ciò con tanto maggior diritto inquantochè *La vraie théorie* è oggi tramontata e probabilmente per non più risorgere.

In un piano s'imagini segnata una linea chiusa arbitraria l, la quale venga percorsa da un punto M in un senso determinato, e si chiamino $\omega_1\ \omega_2 \dots \omega_n$ gli angoli formati con un asse fisso dalle congiungenti M con n punti A prefissati in modo qualunque, di cui però nessuno cada sulla linea l. Quando il punto M avrà percorsa una volta tutta la linea l e sarà ritornato alla posizione iniziale, la somma $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$ avrà subìta una variazione espressa da tante volte 2π quanti sono i punti A che si trovano nell'interno della linea. Quindi, quando entro l si trova almeno un punto A, si potrà spostare M in un senso e di un arco determinato per modo che, al termine del movimento di M, si trovi l'anzidetta somma mutata di una quantità qualsia.

Premessi questi lemmi, indichisi con $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ un'equazione algebrica a coefficienti reali o complessi qualunque; siccome l'esistenza di radici è nota per $n = 1$, così per dimostrarla in generale è sufficiente far vedere che, supposte fornite di radici le equazioni di grado inferiore a un certo valore di n, quelle di grado n ne posseggono in conseguenza. Ora, ammettere che ogni equazione di grado $< n$ ha radici, equivale ad ammettere la decomponibilità in fattori lineari di ogni polinomio intero di grado $< n$; quindi in particolare si potrà scrivere:

$$z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} = (z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_{n-1}).$$

Fatto ciò la questione da risolversi è ridotta a studiare se sia possibile scegliere z in modo che questo prodotto moltiplicato per z risulti eguale a $-a_n$. A tal fine si ponga (chiamando k uno qualunque dei numeri $1, 2, \dots, n-1$)

$$z = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \qquad z - c_k = \rho_k(\cos\varphi_k + i \operatorname{sen}\varphi_k)$$
$$-a_n = \mathrm{R}(\cos\Phi + i \operatorname{sen}\Phi);$$

notando che se M rappresenta, nel modo consueto, la variabile complessa z e $\mathrm{A}_1\ \mathrm{A}_2 \dots \mathrm{A}_{n-1}$ rappresentano i numeri complessi $c_1\ c_2 \dots c_{n-1}$, saranno $\rho\ \rho_1\ \rho_2 \dots \rho_{n-1}$ le lunghezze delle rette MO, MA_1, $\mathrm{MA}_2, \dots, \mathrm{MA}_{n-1}$ e $\varphi\ \varphi_1\ \varphi_2 \dots \varphi_{n-1}$ saranno gli angoli da esse for-

mati coll'asse polare, si vedrà che la questione anzidetta non differisce dalla ricerca di una posizione di M tale che si abbia ad un tempo

$$\rho\,\rho_1\,\rho_2 \dots \rho_{n-1} = \mathrm{R}\,, \quad \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{n-1} \equiv \Phi \pmod{2\pi}.$$

Si supponga ora attribuito a φ un valore arbitrario; siccome si può sempre scegliere ρ in modo che la prima di queste condizioni sia soddisfatta, così su ogni retta r uscente da O esiste un punto D soddisfacente quella condizione; il luogo di tutti i punti D è una curva chiusa δ entro cui giace il punto O. Su δ si deve trovare, se esiste, la cercata posizione di M: ma che esista emerge dal fatto che i lemmi premessi mettono in evidenza la possibilità di scegliere M in modo che sia soddisfatta anche la seconda delle condizioni precedenti. Dunque il punto M si può trovare e l'equazione data risolvere.

Tale è il ragionamento con cui il Mourey conclude l'esistenza di *una* radice dell'equazione data, ragionamento in cui si può trovare soltanto qualche imperfezione di forma e da cui si può emendare [1]. Ma non altrettanto convincenti sono le ragioni addotte per concludere l'esistenza di n radici: giacchè la possibilità di tracciare $n-1$ curve $\delta_1\ \delta_2 \dots \delta_{n-1}$ analoghe alla δ attorno risp. ai punti $\mathrm{A}_1\ \mathrm{A}_2 \dots \mathrm{A}_{n-1}$ e l'esistenza su ognuna di un punto-radice della equazione data, sono conciliabili coll'ipotesi di un unico punto-radice comune a tutte le curve $\delta\ \delta_1\ \delta_2 \dots \delta_{n-1}$, epperò non possono condurre allo scopo a cui mirava il Mourey, scopo d'altronde irragiungibile dal momento che vi sono equazioni di grado n con un numero di radici inferiore a n.

28. Come io ho già rilevato altrove [2], i concetti dirigenti la dimostrazione del Mourey sono i medesimi che E. Holst ha scelti come base di una sua più recente (n. LXII). La quale del resto possiede quelle doti di generalità, rigore e precisione di linguaggio che oggi si esigono e che mancano a quella del geometra francese; di più ivi si apprendono alcune interessanti proposizioni atte a chiarire la distribu-

---

[1] Secondo il Transon (*Application de l'Algèbre directive à la Géométrie,* Nouvelles Annales de Mathématiques, 2ᵉ série, T. VII, 1868, p. 193) queste imperfezioni si riscontrano anche nella dimostrazione del teorema fondamentale che il Faure espose nell'*Essai sur la théorie et l'interprétation des quantités imaginaires* (Paris 1845), che non ci fu possibile esaminare.

[2] G. Loria, *Sur une démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques* (Acta mathematica, t. IX, 1886, p. 71-72).

zione dei punti-radici sulle curve δ, nonchè un'estensione di cui è suscettibile il ragionamento in questione [1].

IX. *Il terzo paralogismo di A. Burg e le dimostrazioni del teorema fondamentale basate su trasformazioni dell'equazione proposta.*

29. Nell'equazione data $X \equiv x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + t = 0$ si supponga n pari e t positivo. Si faccia ivi prima $x = y\sqrt[n]{-1}$ e poi $y = u + iv$. Essa prenderà allora la forma

$$Y \equiv A + iB \equiv (u^n + a_1 u^{n-1} + \ldots + s_1 u + t_1)$$
$$+ i(a_2 u^{n-1} + \ldots + s_2 u + t_2),$$

ove $a_1 \ldots t_1$ $a_2 \ldots t_2$ sono funzioni reali di u, v e dei coefficienti $a \ldots t$. Si può sempre scegliere per v un valore v_0 che renda $a_2 > 0$, e poi si potrà scegliere per u un valore u_0 che renda ad un tempo $A > 0$ e $B > 0$: il Burg (n. XIX) [2] conclude da ciò che « il polinomio $Y = A + iB$ può essere reso positivo ». D'altronde siccome Y è il risultato, cambiato di segno, della sostituzione in X di $(u + iv)\sqrt[n]{-1}$ a x, così per $u = v = 0$, cioè per $x = 0$, $y = 0$, è $Y = -t$, « cioè negativo ». Da queste due circostanze e dall'essere Y funzione continua di u e v, il Burg crede di potere concludere che « fra $y = 0$ e $y = u_0 + iv_0$ deve esistere almeno un valore di y che annulli Y epperò X »; ma ognun vede che questa conclusione è illecita, e che questo terzo tentativo del Burg (cfr. n. 16 e nota relativa) per dimostrare il teorema fondamentale non ebbe miglior risultato degli altri due, e noi non ci saremmo arrestati a farlo conoscere se esso non avesse avuto l'onore dell'inserzione nell'opera del Matthiessen.

30. Il pensiero del Burg di cercare in una trasformazione della equazione il mezzo per provare il teorema fondamentale si ritrova in altre dimostrazioni di cui ora faremo cenno.

Diremo anzitutto del tentativo fatto da Macnie (n. XLIV) per dimostrare il teorema fondamentale per un'equazione di grado n pari a coefficienti reali, il primo dei quali sia l'unità e l'ultimo positivo, supponendolo già verificato in tutti gli altri casi che può presentare

---

[1] In tale estensione, invece di porre la data equazione sotto la forma $x\varphi(x) = \text{cost.}$, la si scrive $x^p\varphi(x) = \psi(x)$ ove φ e ψ sono polinomi interi dei gradi rispettivi $n - p$ e $p - 1$.

[2] V. Matthiessen, op. cit. p. 11.

un'equazione a coefficienti reali. Esso riposa sulla sostituzione $x=y+\theta z$, ove y e z sono quantità reali e θ è una radice n^{ma} di -1, nell'equazione data $f(x)=0$. Posto

$$\theta^r = a_r + \sqrt{-1}\, b_r$$

$$-\mathrm{P} = z^n - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} f_{n-1}(y) z^{n-1} - \dots - \frac{a_1}{1!} f_1(y) z - f(y)$$

$$\mathrm{Q} = \frac{b_{n-1}}{(n-1)!} f_{n-1}(y) z^{n-2} + \dots + \frac{b_1}{1!} f_1(y),$$

si avrà
$$f(y+\theta z) = \mathrm{P} + \sqrt{-1}\, \mathrm{Q} z .$$

Si dia ora ad y un valore tale che risulti

$$(3) \qquad f(y) > 0 ;$$

allora $-\mathrm{P}$ (funzione di z di grado pari coll'ultimo termine negativo) avrà certamente una radice reale e positiva, e questa radice varierà con continuità quando il valore di y muterà, in guisa però da soddifare sempre la condizione precedente. Similmente, se ad y si attribuisce un valore tale che risulti

$$(4) \qquad b_1 f_1(y) < 0$$

si avrà in corrispondenza un valore di z che rende $\mathrm{Q}=0$. Ora il Macnie osserva che, prendendo per y il valore c_1 che annulla $f_1(y)$ questo valore di z è 0, ed è ∞ se si prende per y un valore c_2 che annulla la funzione di grado dispari $f_{n-1}(y)$ e conclude che per tutti i valori di y compresi fra c_1 e c_2 il valore di z che annulla Q varia fra 0 e ∞: ma prima di giungere a questa conclusione non è forse indispensabile accertarsi che tutti i valori di y compresi fra c_1 e c_2 soddisfano la condizione (4)? Supponiamo per un istante fatta questa verificazione e osserviamo col Macnie che quando y varia fra c_1 e c_2, la radice positiva z dell'equazione $-\mathrm{P}=0$ varia con continuità fra due limiti determinati l e L, mentre, come si è già detto, la radice positiva z dell'equazione varia pure con continuità fra 0 e ∞; dovrà dunque esistere fra c_1 e c_2 un valore y_0 e y tale che in corrispondenza le equazioni $-\mathrm{P}=0$, $\mathrm{Q}=0$ siano soddisfatte da uno stesso valore z_0 di z; $x=y_0+\theta z_0$ è una radice dell'equazione data. Ma anche qui si può obbiettare nulla garantire che per y compreso fra c_1 e c_2 la condizione (3) sia sempre soddisfatta. Perciò possiamo asserire che, fino a che non sia dimostrato essere le condizioni (3) e (4) verificate da tutti i valori di y compresi nell'intervallo $(c_1 \dots c_2)$ il ragionamento del Macnie non persuade della verità del teorema fondamentale.

31. Una fisonomia affatto diversa dalle precedenti ha l'applicazione della trasformazione con cui il Malet (n. XLV) dimostrò che un'equazione a coefficienti reali il cui grado contiene 2 a una certa potenza λ è risolubile, supposto che lo sia una il cui grado contiene il 2 a una potenza $< \lambda$: ecco in che consiste.

Nell'equazione proposta, scritta (con coefficienti binomiali, cioè) sotto la forma

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a_k z^{n-k} = 0\,,$$

si ponga $z = x + y$; essa assumerà la forma

$$\sum_{k=0}^{k=n} V_k x^{n-k} = 0$$

essendo
$$V_k = \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{l=k} \binom{k}{l} a_l y^{k-l}\,;$$

e posto $n = 2m$, $x^2 = \xi$ l'equazione proposta sarà soddisfatta ove lo siano ad un tempo le due

$$(5) \qquad \sum_{k=0}^{k=m} V_{2k} \xi^{m-k} = 0 \qquad \sum_{k=0}^{k=m} V_{2k-1} \xi^{m-k} = 0.$$

Ora affinchè ciò accada deve y scegliersi in modo che risulti nullo il risultante dei primi membri di queste due equazioni; tale risultante, calcolato coll'ordinario metodo dialitico, si rivela per una funzione di grado $m(2m-1)$ in y; perciò se $n = 2^{\lambda} n'$, sarà $m = 2^{\lambda-1} n'$ e $m(2m-1) = 2^{\lambda-1} n'(2^{\lambda} n' - 1)$ conterrà il fattore 2 un numero di volte inferiore a λ; ne viene che eguagliando a zero il risultante si ottiene un'equazione in y, per ipotesi, dotata di radici. Preso y eguale a una di esse, i primi membri delle (5) acquistano un fattore comune funzione di x; donde emerge la verità del teorema per ogni equazione a coefficienti reali. Per dimostrarlo anche per un'equazione a coefficienti complessi $f(z) = P + Qi = 0$, ove P e Q sono funzioni reali di z, si consideri l'equazione $P^2 + Q^2 = 0$; essa avrà $2n$ radici, che si distribuiranno equamente fra le due equazioni $P + iQ = 0$ e $P - iQ = 0$ perchè nessuna di queste può averne più di n.

32. Il metodo di dimostrazione testè schizzato era stato proposto, prima del Malet, da un illustre suo conterraneo, il Clifford, il quale ne fece, il 21 febbraio 1870, argomento di una lettura alla Società Filosofica di Cambridge: si desume da ciò dal sunto che ne venne pubblicato sei anni più tardi negli *Atti* di questo sodalizio scientifico (n. XXXVIII).

Ma se l'essenza di essa incontrò degli ostacoli a propagarsi in Inghilterra, niuna meraviglia se non potè attraversare la Manica, e che in Francia sia stata ritenuta atta a informare una *nuova* dimostrazione del teorema fondamentale, la quale venne presentata all'Accademia di Parigi dal Walecki il 12 marzo 1882 (n. LII) e poi ripubblicata l'anno successivo, semplificata dietro i consigli del Laguerre (n. LV).

33. Una spiccata rassomiglianza coll'ultimo dei ragionamenti indicati, ha il procedimento usato da C. Brisse (n. LX) per dedurre l'esistenza di radici in equazioni di grado $m = 2^\lambda k$, k dispari, dalla conoscenza delle radici di equazioni il cui grado contenga il fattore 2 un numero di volte inferiore a λ. Infatti dall'equazione proposta $f(x) = 0$, egli deduce l'altra $f(yx) = 0$: se si può determinare y per modo che i primi membri di queste equazioni abbiano un fattore comune diverso da $f(x)$, si concluderà la decomponibilità di $f(x)$ in fattori. Ora il risultante delle due funzioni (di x) $f(x)$ e $f(yx)$, liberato dal fattore $(y-1)^m$ ed eguagliato a zero, dà un'equazione di grado $m(m-1)$ in y, la quale, essendo reciproca, è suscettibile di abbassamento al grado $\frac{m(m-1)}{2} = 2^{\lambda-1} k(2^\lambda k - 1)$. Siccome questa per ipotesi ha radici, così da $f(x)$ si potrà separare un fattore.

Due cose vogliamo notare: la prima è che il Brisse presenta il suo ragionamento sotto una forma tale da condurre al teorema fondamentale anche per equazioni a coefficienti complessi; l'altra che tale ragionamento, come quello di Clifford-Malet-Walecki, ha un punto di contatto con quello indicato da Gordan (n. 21), cioè l'intervento del risultante di due funzioni e delle proprietà caratteristiche di esso.

X. *Il teorema fondamentale è corollario di un teorema di Cauchy.*

34. Il teorema fondamentale si può considerare come una delle conseguenze della seguente proposizione [1] nella quale ha sede uno dei più memorabili progressi di cui a Cauchy è debitrice l'Analisi matematica:

« Sia $f(z) = P + iQ$ una funzione algebrica razionale intera della variabile complessa $z = x + iy$; P e Q saranno funzioni reali delle due variabili reali x e y. Si segni nel solito piano di rappresentazione una linea chiusa l, la quale non contenga però alcun punto-radice dell'e-

[1] Si vegga la memoria litografata a Torino il 27 settembre 1831 e presentata a quell'Accademia il 17 novembre dell'istesso anno, oppure n. XXIII.

quazione $f(z) = 0$; e si supponga che un punto la percorra sempre in un senso determinato fino a ritornare nella sua posizione iniziale; in ogni posizione del punto mobile il rapporto $\frac{P}{Q}$ avrà un valore determinato, il quale sarà 0 o ∞ nei punti ove è $P = 0$ o $Q = 0$. Ciò posto, sia k il numero delle volte che il rapporto $\frac{P}{Q}$ passa annullandosi dal campo positivo al negativo e k' il numero delle volte in cui accade il passaggio inverso; sarà $k \geqq k'$ e la differenza $k - k'$ sarà eguale al doppio del numero delle radici dell'equazione $f(z) = 0$ situate entro la linea l ».

Cauchy stesso ha rilevata la dipendenza fra quelle due proposizioni. Tuttavia, siccome i ragionamenti da lui fatti nelle ricerche concernenti questo soggetto appartengono alla teoria generale delle funzioni, così, finchè essi non vennero sostituiti con altri più elementari, non si poteva pensare a introdurre nelle ordinarie esposizioni delle proprietà delle equazioni algebriche questo modo di considerare la cosa; ora invece, dopo che Sturm e Liouville (n. XXII) fecero vedere, con mezzi la cui semplicità ed eleganza non lascia nulla a desiderare, che — come del resto potevasi prevedere — non è indispensabile percorrere la via seguita da Cauchy per giungere alla proposizione da lui scoperta, si può benissimo porre questa proposizione a fondamento di una teoria delle equazioni: tanto più che essa non solo apre l'adito alla verità di cui ci stiamo occupando, ma mena eziandio a un metodo di separazione (e quindi di approssimazione) delle radici complesse di un'equazione algebrica qualunque.

XI. *Dimostrazioni affini alla deduzione precedente.*

35. Faremo qui menzione di altre due dimostrazioni del teorema fondamentale, le quali, come la precedente, riposano sull'esame delle variazioni del rapporto $\frac{P}{Q}$, e che, a chi guardi più alla sostanza che alla forma, si manifestano fra loro identiche; una fu indicata dall'Ullherr (n. XXIX) — al quale erano probabilmente ignote le investigazioni di Cauchy — e l'altra dal De Morgan (n. XXXIII) — che ivi trovò lo stimolo ai proprî studi.

I. L'Ullherr pone

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,, \qquad f(z) = P + iQ = R(\cos\Phi + i\,\mathrm{sen}\,\Phi)$$

(onde $$\Phi = \mathrm{arc\ cotg}\,\frac{P}{Q}\Big)\,,$$

ed osserva anzitutto come ad ogni coppia di valori r e φ corrisponda per R un valore determinato e per Φ un valore determinato a meno di multipli di 2π, tranne se $R = 0$, chè allora Φ è assolutamente indeterminato. Escluso questo caso, R e Φ variano con continuità assieme a r e φ, e per uno stesso valore di r e per due valori di φ differenti di un multiplo di 2π hanno i medesimi valori. Ne viene che quando φ percorre un intervallo di ampiezza 2π ed r è scelto in modo che R non si annulli mai, i valori di Φ corrispondenti al principio e al termine dell'intervallo, avranno per differenza 0 o un multiplo di 2π: tale differenza deve conservarsi la stessa per tutti i valori di r pei quali R non è mai nulla. Emerge da ciò che se negli estremi di un certo intervallo descritto da r, l'anzidetta differenza ha valori fra loro differenti, esisterà in esso intervallo almeno un valore di r capace di annullare R. Ora, tenendo presenti le espressioni di R e Φ mediante r e φ si vede che per $r = \infty$ quella differenza è $n.2\pi$ (n = grado di $f(z)$), mentre è nulla per $r = 0$; quindi fra 0 e ∞ esiste almeno un valore di r che renda $R = 0$: donde scaturisce la verità del teorema dal momento che è $R = | f(z) |$.

II. Il De Morgan prende invece le mosse da alcune fra quelle considerazioni generali ed astratte sopra i simboli definiti da certe proprietà e le operazioni eseguibili su di essi, che sono tanto care ai geometri inglesi. E precisamente, egli considera una successione arbitraria di segni $+$ $-$ 0 ∞ (i quali non abbiano di necessità i consueti significati) avente la proprietà che due segni $+$ e $-$ siano sempre separati da uno 0 o da un ∞ e che sia lecito di trasformarla in altra analoga in cui sia rispettata questa condizione. Si può allora dimostrare che se la terna di segni $+ \; 0 \; -$ si presenta in una successione variabile k volte e l volte la terna $- \; 0 \; +$, è impossibile che la differenza $k - l$ cambi valore a meno che, nel passare con continuità dall'una successione all'altra, non si verifichi una coincidenza di un punto 0 con un punto ∞.

Una successione della natura dianzi definita si presenta se si traccia nel solito piano di rappresentazione dei numeri complessi una linea chiusa arbitraria e in ogni suo punto (x, y) si registra il segno $+$ o $-$, oppure il divenire 0 o ∞ del rapporto $\frac{P}{Q}$; la linea, nonchè ogni sua porzione, presenterà allora una « catena di segni » come sarebbe $+ \; 0 \; - \; 0 \; + \; \infty \; + \ldots$ Se la linea o una sua porzione viene mutata verrà anche a mutarsi la catena di segni e si potrà regolare la legge di variazione in modo che in ogni istante non venga alterato più di uno dei segni 0 o ∞. Siccome P e Q non possono divenire infinite che

pei valori infiniti di x e y, così è $\frac{P}{Q} = 0$ solo quando $P = 0$ ed è $\frac{P}{Q} = \infty$ solo quando $Q = 0$, e $\frac{P}{Q}$ ha la forma $\frac{0}{0}$ quando e solo quando si verifichi una coincidenza di 0 e ∞. Ne viene che se noi troviamo due linee chiuse sulle quali la differenza $k - l$ assuma valori differenti, potremo asserire che nel trasformare con continuità l'una di esse nell'altra avremo incontrata una posizione della linea sulla quale avviene un incontro di uno 0 con un ∞: vi sarà perciò un punto del piano ove è ad un tempo $P = 0$, $Q = 0$ epperò $f(z) = 0$. Ora l'esistenza di due linee soddisfacenti alle condizioni anzidette è facilmente provata: come tali possono scegliersi una linea di cui tutti i punti siano infinitamente vicini all'origine e una di cui tutti i punti siano infinitamente lontani. Dunque è dimostrata l'esistenza di radici dell'equazione $f(z) = 0$.

36. Giova qui osservare che il confronto dei valori assunti da P e Q quando r è piccolissimo e quando r è grandissimo, si ritrova in una dimostrazione che l'Airy ha proposta (n. XXXIV) e designata come erigentesi sullo stesso principio di quella del De Morgan. Essa però non dipende, come questa, dalla considerazione della « catena dei segni » e dallo studio de' cambiamenti di essa; invece vi intervengono delle illustrazioni geometriche di indole totalmente diversa, le quali sono forse più perspicue e richiamano alla mente quelle su cui innalza la prima dimostrazione di Gauss.

37. Ci conviene ora di intrattenerci su un'argomentazione assai notevole che di recente è stata esposta dal Sochocki (n. LVII) nel cap. II, § VI della sua opera *La risoluzione delle equazioni numeriche* (¹). L'opportunità di farne cenno qui è palesata dal fatto che essa, a somiglianza delle altre di cui abbiamo discorso in questo §, si sostiene sui risultati a cui mena lo studio della variazione subìta dall'argomento del primo membro dell'equazione che si considera, quando il punto che rappresenta la variabile percorre una determinata linea. Con maggior precisione, essa trova il proprio fondamento nei due lemmi seguenti:

I. Quando il modulo di una funzione intera prende sul contorno e nell'interno di una curva chiusa dei valori non inferiori a un numero

---

(¹) Ne debbo la conoscenza alla cortesia del mio dotto amico S. Dickstein, il quale mi assicurò poi che le letterature russa e polacca non offrono verun'altra dimostrazione originale del teorema di cui ci stiamo occupando.

positivo determinato k, la variazione che subisce l'argomento della funzione quando la variabile descrive quella curva, è nulla.

II. Se $f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$ è una funzione intera di grado n, a un numero positivo arbitrario ma non inferiore ad alcuno dei numeri $|A_1|, \ldots, |A_n|$ e k un numero positivo inferiore ad $|A|$; se si descrive attorno all'origine delle coordinate una curva chiusa (PQRS ... P) tale che la distanza di ogni suo punto dall'origine sia maggiore o eguale a $1 + \frac{a}{k}$, la variazione [che indicheremo con var. (PQRS ... P)] dell'argomento di $f(x)$ quando la variabile x descrive quella curva, sarà eguale a $2n\pi$.

Ammesse queste proposizioni si designi con m un numero intero positivo superiore a $1 + \frac{a}{k}$ e si portino sugli assi coordinati a cominciare dall'origine, da una e dall'altra parte, le lunghezze $1, 2, \ldots, m$ e per i punti così ottenuti si conducano le parallele agli assi. Le parallele estreme limiteranno un quadrato ABCD, il cui contorno consterà di punti la cui distanza dall'origine è superiore a $1 + \frac{a}{k}$; ne viene (in virtù del lemma II) che sarà:

$$\text{var}\,(\text{ABCDA}) = 2n\pi\,.$$

Il quadrato ABCD si trova decomposto in $4m^2$ quadrati mediante le parallele dianzi tracciate; se su una di queste la funzione $f(x)$ si annullasse, il teorema sarebbe dimostrato; quando ciò non accada, potremo scrivere

$$\text{var}\,(\text{ABCDA} = \Sigma\ \text{var}\,(abcda)\,,$$

ove la somma che sta al secondo membro si deve estendere ai contorni dei $4m^2$ quadrati analoghi ad $abcd$ in cui è diviso il quadrato ABCD. Sarà quindi:

$$\Sigma\ \text{var}\,(abcda) = 2n\pi.$$

Emerge da ciò che fra quei $4m^2$ quadrati minori deve trovarsene uno almeno tale che la variazione dell'argomento di $f(x)$ sul suo contorno sia differente da zero. Indicando con $abcd$ questo quadrato e con k un intero positivo, potremo perciò scrivere

$$\text{var}\,(abcda) = 2k\pi.$$

Siccome i valori di $|f(x)|$ nell'interno e sul contorno di $abcd$ non possono essere tutti superiori a un numero positivo arbitrario (perchè altrimenti il lemma I porterebbe a concludere var $(abcda) = 0$) così nell'interno o sul contorno di quel quadrato $|f(x)|$ assumerà dei valori abbastanza piccoli.

Dividiamo ogni lato del quadrato *abcd* in 10 (ad es.) parti eguali e congiungiamo con delle rette i punti omologhi situati sui lati opposti; quel quadrato sarà così diviso in 10^2 quadrati di cui uno qualunque chiameremo $a'b'c'd'$. Escluso il caso dell'annullarsi di $f(x)$ su un lato di uno di questi quadrati parziali (nel qual caso il teorema sarebbe dimostrato) avremo

$$\text{var}\,(abcda) = \Sigma \,\text{var}\,(a'b'c'd'a'),$$

epperò

$$\Sigma \,\text{var}\,(a'b'c'd'a') = 2k\pi,$$

ove il segno Σ deve estendersi ai 10^2 quadrati in cui è stato diviso il quadrato *abcd*. Da questa relazione segue che fra questi quadrati ve ne sarà uno almeno al cui contorno corrisponde una variazione non nulla; indicandolo con $a'b'c'd'$ e significando con k' un intero positivo, potremo concludere

$$\text{var}\,(a'b'c'd'a') = 2k'\pi.$$

Ne viene che nell'interno o sul contorno di $a'b'c'd'$, $|\,f(x)\,|$ assumerà dei valori abbastanza piccoli. Proseguendo nello stesso modo o arriveremo a un punto-radice di $f(x)$ situato su una delle rette ausiliari per la dimostrazione, oppure ci approssimeremo indefinitamente ad un punto tale che il valore di $|\,f(x)\,|$ risulti ivi inferiore a qualunque numero arbitrariamente piccolo, in altre parole, ci avvicineremo indefinitamente ad una radice dell'equazione $f(x) = 0$. In un caso e nell'altro si conclude il teorema fondamentale.

XII. *Dimostrazioni di Collins e Phragmén.*

38. Siccome dimostrare l'esistenza di radici in un'equazione algebrica $f(x) = 0$ (la quale ora supporremo di grado pari e a coefficienti reali) equivale a dimostrare l'esistenza nel suo primo membro $f(x)$ di un fattore quadratico, così la verità del teorema fondamentale sarà posta fuori di discussione quando sarà assodata la possibilità di determinare le costanti arbitrarie b e c in guisa che, posto

$$f(x) = (x^2 - bx + c)\,Q(x) + (tx + u),$$

risulti ad un tempo $t = 0$ e $u = 0$. Partendo da questo concetto semplice e naturale E. Collins (n. XXIV) ha inventato un ragionamento sufficiente a risolvere la questione che ci occupa, il quale ci sembra degno di un destino assai diverso della totale dimenticanza in cui è caduto.

A fine di svolgere l'indicato concetto, si chiamino α e β le radici dell'equazione $x^2 - bx + c = 0$. Sarà allora:

$$f(\alpha) = t\alpha + u \,, \quad f(\beta) = t\beta + u$$

ossia

$$t = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} \,, \quad u = \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta} \,;$$

ora i secondi membri di queste eguaglianze essendo funzioni simmetriche delle radici di $x^2 - bx + c + 0$ si potranno esprimere razionalmente in funzione dei coefficienti b e c, nonchè delle costanti p e q definite dalle relazioni

$$p = \frac{1}{2} b \,, \quad q = \frac{1}{4} b^2 - c \,.$$

Ottenute le espressioni di t e u in funzione algebrica razionale e intera di p e q per concludere il teorema fondamentale basta dimostrare l'esistenza di una coppia di valori reali di p e q capaci di verificare le due equazioni $t = 0$, $u = 0$ o altre due formanti un sistema equivalente. Ora ciò vien fatto dal Collins tenendo conto dei gradi delle equazioni $t = 0$, $u = 0$ nelle variabili p e $k = \dfrac{q}{p^2}$ e appoggiandosi alla proposizione seguente da lui dimostrata come lemma alle sue ricerche:

« Sia $f(x, y)$ una funzione intera di grado qualunque avente la proprietà che ad ogni valore di x scelto in un dato intervallo corrisponda almeno un valore di y che formi assieme ad esso una soluzione della equazione $f(x, y) = 0$. Siano $x = \alpha$, $y = \beta$ e $x = \gamma$, $y = \delta$ due tali soluzioni; se esse, sostituite nel primo membro di un'altra funzione intera $F(x, y)$, le fanno prendere valori di segni opposti, fra α e γ esisterà almeno un valore di x che assieme al corrispondente valore di y, soddisfi, non solo l'equazione $f(x, y) = 0$, ma anche la $F(x, y) = 0$ ».

Per valutare questa dimostrazione si osservi che essa poggia sulla ipotesi che siano reali i coefficienti dell'equazione che si studia e che ivi vien fatta quella restrizione concernente la parità del grado della equazione, la cui eliminazione era un *desideratum* di Cauchy (n. XIV, p. 411): onde il risultato al quale essa conduce non ha la generalità massima a cui si possa giungere. Ma questi inconvenienti non ci sembrano avere un'eccessiva gravità, perchè pensiamo che il concetto che informa tutto il ragionamento del Collins, avendo la sua prima radice nella teoria della divisibilità dei polinomî, può applicarsi nelle ipotesi più ampie che possano farsi sulla funzione $f(x)$: onde non ci sembra sragionevole la speranza che dalla dimostrazione su cui ci siamo ora trattenuti se ne possa desumere un'altra la quale si trovi rispetto ad essa in condizioni analoghe a quelle in cui la *quarta* dimostrazione di

Gauss sta colla *prima;* altri giudichi se ben ci apponiamo in questa congettura.

39. L'idea del Collins di ridurre la ricerca delle radici di un'equazione alla ricerca di un trinomio di secondo grado pel quale sia divisibile il primo membro dell'equazione stessa governa anche la dimostrazione tentata dal Jourjon (n. LXIII). Ma qui si arrestano le analogie fra i due lavori. Giacchè il Jourjon per raggiungere il suo intento si serve poi di un ragionamento il quale offre una spiccata analogia colla dimostrazione di Cauchy e nel quale si notano, anzi sotto forma più deplorevole, i difetti che avvertimmo in questa. Di più, collo scopo di evitare l'uso esplicito delle quantità immaginarie, il Jourjon ha rievocate dalla tomba in cui sono sepolte le *clefs algébriques* di Cauchy [1], per la qual cosa noi non gli tributeremo gran lode, perchè opiniamo essere omai tempo che cessi quel terrore che gli immaginarî incutevano in passato, terrore affatto ingiustificato oggi che sappiamo come tali enti, convenientemente definiti e trattati, non soltanto siano incapaci di indurre in errore, ma porgano i mezzi più diretti per risolvere colla debita generalità le questioni che l'Algebra o le sue applicazioni presentano; invece dunque di studiarsi di nasconderli in quelle circostanze in cui il loro intervento si può dissimulare forse ma non impedire, non è forse assai miglior consiglio l'adoperarli sempre colla stessa libertà dei numeri reali?

40. Nè questa nostra persuasione venne scossa dallo studio della bella memoria (n. LXXI) in cui il Phragmén ha dimostrata (battendo una via assai somigliante a quella aperta dal Collins) come per porre fuor di dubbio la verità del teorema fondamentale non facessero mestieri nè i numeri immaginarî, nè le funzioni trigonometriche, giacchè di quelle si può liberarsi invocando la teoria della divisibilità dei polinomî e di queste può farsi a meno introducendo due serie di funzioni definite algebricamente per via ricorrente. Per più minute notizie su gli studi del Phragmén, rimandiamo il lettore all'importante memoria originale.

---

[1] Le parole seguenti non devono venire interpretate come l'espressione di poca stima per la memoria di Cauchy *Sur les clefs algébriques* (Comptes rendus, T. XXXVI, 1853, p. 70 e 129), la quale anzi è da designarsi come una delle più geniali produzioni del grande analista francese, ma unicamente come prodotte dal convincimento mio che sia poco opportuno servirsi delle idee ivi esposte per bandire gli immaginarî dalla ricerca che ci occupa.

XIII. *Ogni funzione algebrica razionale intera di una variabile è capace di assumere qualunque valore.*

41. La proposizione enunciata come titolo di questo § è soltanto di forma più generale del teorema fondamentale. Presentata sotto veste geometrica essa equivale alla seguente: posto $w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, se si rappresentano nel modo ordinario sopra due piani le due variabili complesse z e w e per ogni posizione del punto rappresentante z si costruisce il punto rappresentativo w, allora, dopo che il primo punto avrà occupate tutte le posizioni possibili nel proprio piano, le corrispondenti posizioni del punto w copriranno completamente l'altro piano.

42. Enunciato sotto forma algebrica il teorema si può dimostrare o in modo assai semplice ricorrendo ad alcune proposizioni appartenenti alla teoria generale delle funzioni di variabili complesse (come io, nelle mie lezioni di Analisi superiore, ho sempre cura di rilevare a mo' di illustrazione delle parole di Fontenelle « Tel est l'effet des méthodes générales, quand on a une fois sçûs les découvrir. On est à la source, et on n'a pas plus qu'à se laisser aller au cours paisible des conséquences ») oppure più artificiosamente ma con mezzi più elementari (come ha notato il Kinkelin, n. XXXIX): di entrambe queste dimostrazioni faremo ora un rapido cenno.

I. Una funzione uniforme w di una variabile complessa la quale si conservi monodroma continua e finita in tutto il piano è necessariamente una costante. Se quindi w non si riduce a una costante ed è esente da singolarità essenziali, essa dovrà per qualche valore di z diventare infinita, epperò anche (perchè $\frac{1}{w - c}$ è nelle stesse condizioni), assumere un valore arbitrario c. D'altronde si sa che una funzione uniforme scevra di singolarità essenziali è algebrica razionale. Dunque è sempre possibile soddisfare l'equazione

$$\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^p + b_1 z^{p-1} + \ldots + b_p} = c$$

e in particolare alla

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \quad \text{q. e. d.}$$

II. Si chiami, col Kinkelin, ***illimitata*** (unbegrenzt) ogni funzione della variabile complessa z capace di assumere tutti i valori reali e complessi. È pressochè evidente che, addizionando a una funzione illi-

mitata una costante, non si fa perdere ad essa la sua proprietà caratteristica. Più difficile è il mostrare che il prodotto di z per una funzione illimitata è una nuova funzione illimitata; onde pervenire rigorosamente a questa conclusione fa d'uopo rendere perfetto un ragionamento del Kinkelin, il che è possibile. Applicando alternativamente queste proposizioni prendendo come punto di partenza z (funzione illimitata di z stessa) si conclude successivamente che sono illimitate le funzioni $z+a_1$, $z(z+a_1)$, $z(z+a_1)+a_2$, $z(z^2+a_1z+a_2)$, $z(z^2+a_1z+a_2)+a_3$ e così via, finalmente che lo è il polinomio $z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ qualunque siano le costanti reali o complesse $a_1\ a_2 \ldots a_n$. Resta così dimostrata l'esistenza di *una* radice in ogni equazione algebrica di grado n.

Per provare poi che essa ne possiede n, il Kinkelin deduce dalle cose precedenti che, supposto ciò avvenga in un'equazione senza termine noto, lo stesso accadrà per un'equazione completa. In virtù di questa proposizione preliminare, poichè $z(z+a_1)$ si annulla per due valori di z, lo stesso accadrà per $z(z+a_1)+a_2$; allora $z(z^2+a_1z+a_2)$ si annulla per tre valori di z, perciò altrettanto avverrà per $z(z^2+a_1z+a_2)+a_3$; così proseguendo si arriverà finalmente a concludere quanto si voleva [1]. Altri giudichi se quest'argomentazione sia da preferirsi all'altra mediante cui di solito si giunge a questo risultato quando si conosca una radice dell'equazione proposta $f(z)=0$ e il teorema « se $f(\alpha)=0$, sarà $f(z)$ divisibile per $z-\alpha$ » [2].

43. Del teorema anzidetto enunciato sotto forma geometrica conosciamo pure due dimostrazioni.

I. La prima fu esposta dallo Schreibner (n. XXXVI) nelle sue lezioni, come segue: Rappresentate su due piani le variabili complesse w e z, e supposto che z abbia presi tutti i valori reali o complessi,

---

(1) Di un concetto simile si è servito l'Holzmüller (*Einführung in di Theorie der isogonalen Verwandschaften und der conformen Abbildungen*, 1882, p. 183 e seg.) nel costruire la superficie di Riemann relativa alla funzione $z=w^n+a_1w^{n-1}+\ldots+a_n$: egli diede così (sono sue parole) un commento geometrico al teorema fondamentale dell'Algebra.

(2) Colla dimostrazione del Kinkelin sembrano avere qualche analogia le due del Mandl (n. L). Da quel poco che se ne conosce risulta che esse miravano non solo a mettere in luce *tutte* le radici dell'equazione proposta, ma anche a insegnare un nuovo metodo per calcolarle. Nella prima si fa vedere che se esiste una funzione intera di grado n decomponibile in n fattori, la stessa prerogativa avrà qualunque altra funzione dello stesso grado; nella seconda invece il teorema viene dimostrato per induzione.

o w coprirà tutto il proprio piano, oppure esisteranno in questo delle isole entro le quali w non può penetrare. In questo secondo caso devono i punti delle loro rive (non solo devono corrispondere a dei valori di z), ma avere la proprietà che, delle variazioni infinitesime eseguite sui valori corrispondenti di z, in qualunque direzione vengano eseguite, non possano mai produrre delle variazioni in w capaci di aprir l'adito all'interno di quelle isole. Ma si dimostra che ad una porzione infinitesima di piano che circondi un punto z corrisponde una porzione pure infinitesima dell'altro piano circondante il corrispondente punto w. Dunque le isole presupposte non esistono e w può prendere ogni valore.

II. La seconda dimostrazione può presentarsi così:

Nell'equazione proposta

$$w = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

si supponga

$$z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi), \quad a_r = A_r(\cos\alpha_r + i \operatorname{sen}\alpha_r);$$

sarà allora

$$w = r^n\left[\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)\right] + A_1 r^{n-1}\left[\cos(\alpha_1 + \overline{n-1}\,\varphi)\right.$$
$$\left. + i \operatorname{sen}(\alpha_1 + \overline{n-1}\,\varphi)\right] + \ldots + A_{n-1}\left[\cos(\alpha_{n-1} + \varphi) + i \operatorname{sen}(\alpha_{n-1} + \varphi)\right]$$
$$+ A_n\left[\cos\alpha_n + i \operatorname{sen}\alpha_n\right]$$

e w sarà funzione continua di r e φ. Perciò, se si chiama M il punto che rappresenta la variabile complessa w, la posizione di M varierà con continuità quando si suppone che in questo modo variino r e φ. Se quindi si tiene costante r e a φ si attribuiscono dei valori sempre crescenti o sempre decrescenti a partire da un valore arbitrario φ_0, quando φ avrà raggiunto il valore $\varphi_0 + 2m\pi$ (m intero) il punto M sarà ritornato alla posizione iniziale dopo avere descritto una curva che, supposto r abbastanza grande, fa n giri attorno all'origine O e per ottenere la quale basta supporre $m = \pm 1$. Ad ogni valore di r compreso fra 0 e ∞ corrisponde una curva di tal fatta; tutte derivano mediante trasformazioni continue da una di esse, supponendo r variare con legge di continuità: e se imaginiamo che r decresca da quel valore di r abbastanza grande di cui si è parlato fino a 0, vedremo che quelle curve finiranno per ridursi al punto A che rappresenta il numero complesso a_n. Ma affinchè una curva, facente n circonvoluzioni attorno ad O e variabile con continuità, finisca per ridursi al punto A, essa deve in una sua posizione contenere il punto O. Dunque la funzione w è capace di prendere il valore O.

Se il numero di volte in cui una stessa scoperta venne fatta può servire di criterio misuratore della spontaneità con cui essa presentasi

alla nostra mente, nessuna dimostrazione del teorema fondamentale può competere per naturalezza con quella ultimamente delineata. Essa infatti viene indicata una prima volta (sotto aspetto un po' diverso da quello sotto cui noi ora la presentammo) nel 1840 dal Dehana (n. XXVI) e sei anni dopo è pubblicata come nuova dall'Ullherr (n. XXIX). Il concetto su cui essa riposa appare poi come originale nel 1883 allo Hocks (n. LIV) che tenta costruire su di esso una dimostrazione del teorema fondamentale, la quale però, non soltanto manca di novità, ma ha mestieri di modificazioni (n. LXVIII) prima di potere essere detta conclusiva. E finalmente negli anni 1884, 1885 e 1887 ci si presentano quattro nuove redazioni della stessa argomentazione (n. LVI, LVIII, LIX e LXVI), redazioni da ritenersi identiche quando si prescinda da diversità più o meno rilevanti nei particolari (1).

XIV. *Riassunto e confronto.*

44. Ed ora che abbiamo compiuta la sommaria disamina delle dimostrazioni a noi note del teorema fondamentale, una questione ci si presenta e quasi ci si impone: quale di esse merita di venire preferita nell'insegnamento? Enunciata sotto forma così generale, essa non è suscettibile di risposta accettabile universalmente, onde fa d'uopo che noi dichiariamo anzitutto i criterî che sceglieremo come a guida nel risolverla.

Non ci schiereremo fra gli oppositori delle dimostrazioni non puramente algebriche, perchè, per dirlo con le parole di Leonardo Pisano, *Arithmeticae et Geometriae scientiae sunt connexae et suffragatoriae sibi ad invicem;* e d'altronde a tutte quelle in cui intervengono considerazioni geometriche possono applicarsi le elevate osservazioni di Gauss che riportammo nel n. 9 (2). Nè ascriveremo a gran merito di

(1) Alle sette versioni ora indicate della dimostrazione di Deahna, una ottava ne aggiungeremmo — quella contenuta nella nota dello Zeuthen (n. LXIX) — ove l'esame troppo fugace che solo ci fu dato di compierne non ci rendesse titubanti nel pronunciare un giudizio su di essa.

(2) Un nuovo argomento in favore dell'adozione esplicita di considerazioni geometriche, ci è offerto dal fatto che il Mansion, che pure è d'avviso doversi dimostrare in modo puramente aritmetico il teorema fondamentale (cfr. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XIV, 1890, 1re partie, p. 46), chiude la sua esposizione della dimostrazione del Lipschitz colla seguente nota: « Quoique nous ayons évité l'emploi de considérations géometriques dans la démonstration précédente, nous tenons à déclarer que ce sont des considérations de ce genre qui permettront au lecteur de voir combien la marche suivie est, au fond, simple et naturelle malgré l'apparente complication des calculs ».

una dimostrazione lo scansare l'uso di funzioni trigonometriche, perchè ci sembra che, dal momento che queste fungono da preziosi ausiliari in tutti i campi della Matematica, il farne a meno in una circostanza isolata sia di poco rilievo. Da ultimo non riterremo come stretto dovere di una dimostrazione il mettere in luce tutte le radici di un'equazione; vista la facilità con cui, dopo di avere accertata nelle ipotesi più ampie l'esistenza di una radice, si deducono tutte le altre; l'attitudine di una dimostrazione di condurre a questo risultato, ci sembra piuttosto da annoverarsi fra i pregi che essa possiede, non come un debito a cui essa è tenuta a soddisfare.

Esigeremo invece che una dimostrazione sia applicabile ad equazioni di qualunque grado, a coefficienti reali o complessi, memori dell'aureo consiglio di Laplace: « Préférez dans l'enseignement les méthodes générales, attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple, et vous verrez en même temps qu'elles sont presque toujours les plus faciles ».

La nostra ignoranza della lingua polacca ci costringe a sospendere il favorevole giudizio sulla dimostrazione del Sochocki al quale ci sentiremmo trascinati per quel poco che di essa conosciamo. Ci è lecito ritenerci esonerati dal porre in discussione la terza dimostrazione di Gauss e quelle di Stieltjes e Netto [1], le quali non possono servire che come esempî del sussidio scambievole che oggi si prestano le varie parti della Matematica. Altrettanto faremo riguardo a quelle che, per venire intese appieno, esigono molta famigliarità nel porre un ragionamento algebrico sotto forma geometrica o nel ravvisare il substrato analitico di un'argomentazione geometrica. La consuetudine tanto diffusa di preporre tutta la teoria delle equazioni con un'incognita all'esposizione della teoria dell'eliminazione, induce ad escludere quei ragionamenti che riposano sulle proprietà caratteristiche del risultante di due funzioni. Le eminenti doti che adornano la dimostrazione di Staudt sollecitano insistentemente per l'accoglimento di essa, e noi glielo accorderemmo ove non riflettessimo che l'esperienza dimostra quanto una scolaresca si agghiacci sotto lo stillicidio euclideo di una serie di proposizioni che si riconoscono sufficienti, ma non necessarie, per raggiungere un determinato scopo, il cui intimo legame scambievole e col fine a cui mirano non può svelarsi senza lunghi sviluppi.

Rimangono dunque a contendersi la palma della vittoria la dimostrazione derivata dalle osservazioni di Legendre, sotto uno degli sva-

(1) Non quella del Walton (n. XL) chè questi dimostra per il caso che gl'interessa tutte le proposizioni di Calcolo infinitesimale che gli occorre di invocare.

riati aspetti in cui venne presentata (supponendo, ben inteso, di avere, ove occorra, preventivamente dimostrata l'esistenza di un minimo per una funzione algebrica razionale intera di due variabili), e la deduzione del teorema fondamentale dal teorema di Cauchy enunziato nel n. 34. Se il primo di questi sistemi ha il vantaggio di essere più naturale e diretto, l'altro ha quello di porgere il destro all'esposizione di nuovi veri. Del resto essi ci sembrano presentare difficoltà approssimativamente eguali, onde riteniamo giustizia dichiararli eleggibili *ex equo* (¹).

Genova, 18 maggio 1891.

ELENCO DEI LAVORI

nei quali si leggono le dimostrazioni del teorema fondamentale analizzate nella memoria precedente.

Anno 1746

I. D'Alembert, « Recherches sur le calcul intégral, 1^re^ partie ». Histoire de l'Académie des Sciences et Belles Lettres, année MDCCXLVI (Berlin 1748), p. 183 e seg.

1749

II. Euler, « Recherches sur les racines imaginaires des équations ». Histoire de l'Académie des Sciences et Belles Lettres, année MDCCXLIX (Berlin 1751), p. 222 e seg.

1759

III. Daviet de Foncenex, « Refléxions sur les quantités imaginaires ». Miscellanea philosophica-mathematica Societatis privatae Taurinensis, t. I, p. 113 e seg.

(¹) È importante notare come parecchi degli scienziati che si occuparono di dimostrare il teorema fondamentale della teoria delle equazioni *algebriche*, abbiano osservato che i loro ragionamenti sono applicabili anche ad equazioni *trascendenti;* ma nessuno ha determinato con precisione quali proprietà dovesse possedere il primo membro di un'equazione affinchè la conclusione definitiva si conservasse. Ora poichè vi sono funzioni trascendenti le quali non si annullano mai, tranne nei loro punti di singolarità essenziale ove possono prendere qualunque valore (tale è $e^{G(z)}$, $G(z)$ essendo una funzione trascendente intera) così è problema che aspetta ancora una soluzione, quella di « determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'equazione $f(z)=0$ abbia radici nel campo degli ordinarî numeri complessi ».

1772

IV. Lagrange, « Sur la forme des racines imaginaires des équations ». Nouveaux mémoires de l'Académie de Berlin, p. 222 e seg. V. anche « Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés » (I éd. 1798, II 1808, III 1826).

1795

V. Laplace, « Leçons de Mathématique données à l'Ecole Normale ». Journal de l'Ecole polytéchn., VII et VIII cah. Juin 1812.

1799

VI. Gauss, « Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse ». Helmstadii 1799. (V. anche Gauss Werke, III Bd. Göttingen 1866, p. 1-30).

1806

VII. Argand, « Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques ». 1re édition 1806, 2e édition 1874.

1806

VIII. Legendre, « Essai sur la théorie des nombres ». 2e édition, Paris 1808.

1811-1812

IX. Dubourget, « Démonstration du principe qui sert de fondement à la théorie des équations ». Annales de Mathématiques, t. II, p. 338.

1813-1814

X. Argand, « Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques ». Annales de Mathématiques, t. IV, p. 133.

1814-1815

XI. Argand, « Réfléxions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'Analyse ». Annales de Mathématiques, t. V, p. 197.

1816

XII. Gauss, « Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse ». Commentationes recentiores, V. III, Gottingae 1816, oppure Gauss Werke, III Bd. p. 31-56.

XIII. Gauss, « Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia ». Commentationes recentiores, V. III, Gottingae 1816, oppure Gauss Werke, III Bd. p. 57-64.

1820

XIV. Cauchy, « Sur les racines imaginaires des équations ». Journal de l'Ecole polytéchnique, XVIII cahier, p. 411.

1821

XV. Cauchy, « Cours d'Analyse de l'Ecole royale polytéchnique », 1re partie.

1828

XVI. Mouray, « La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, dedié aux amis de l'évidence ». 1re éd. 1828, 2e éd. 1861.

1829

XVII. Cauchy, « Sur la résolution des équations numériques et sur la théorie de l'élimination ». Exercices de Mathématiques. 4e année.

1830

XVIII. A. v. Burg, « Ueber die Existenz der Wurzeln einer höhern Gleichung mit einer Unbekannten ». Journal für Mathematik, V Bd. p. 182.

?

XIX. A. v. Burg, « Jahrb. des k. k. polyt. Inst. » Bd. XVII.

1833

XX. A. v. Burg, « Compendium der höheren Mathematik ».

XXI. G. Peacock, « Report on the Recent Progress and Present State of certain Branches of Analysis ». Report of the Third Meeting of the British Association for the Adv. of Science held at Cambridge; London 1834.

1836

XXII. Sturm et Liouville, « Démonstration d'un théorème de Cauchy rélatif aux racines imaginaires des équations ». Journal de Mathématique, t. I, p. 278.

1837

XXIII. Cauchy, « Calcul des Indices des Fonctions ». Journal de l'Ecole polytéchnique, XXV cahier, p. 177.

1838

XXIV. COLLINS, « Neuer Beweis der Zerlegbarkeit ganzer Functionen in reelle Factoren vom ersten oder zweiten Grade ». Journal für Mathematik, t. XVIII, p. 119.

1839

XXV. LIOUVILLE, « Sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques ». Journal de Mathématiques, t. IV, p. 501.

1840

XXVI. DEAHNA, « Neuer Beweis für die Auflösbarkeit der algebrischen Gleichungen durch reelle oder imaginare Werthe der Unbekannten ». Journal für Mathematik, XX Bd. p. 337.

1842

XXVII. STERN, « Elementarer Beweis eines Fundamentalsatzes aus der Theorie der Gleichungen ». Journ. für Mathem., XXIII Bd. p. 370.

1845

XXVIII. G. K. C. v. STAUDT, « Beweis der Satzes, dass jede algebraische ganze Function von einer Veränderlichen in Factoren vom ersten Grade aufgelöset werden kann ». Journal für Mathematik, t. XXIX, p. 97.

1846

XXIX. ULLHERR, « Zwei Beweises für die Existenz des Wurzeln der höheren algebraischen Gleichungen ». Journal für Mathematik, XXXI Bd. p. 231.

1849

XXX. GAUSS, « Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen ». Göttinger Abhandlung Bd. IV, 1850, oppure Gauss Werke, Bd. III, p. 71-102.

XXXI. SERRET, « Cours d'Algèbre supérieure, 1ère éd. ».

1852

XXXII. SUSSMANN, « Vereinfachung des Beweises von Cauchy, dass jede Gleichungen n^{ten} Grades wenigstens eine Wurzel hat. ». Journal für Mathematik, XLIV Bd. p. 57.

1857

XXXIII. DE MORGAN, « A Proof of the Existence of a Root in every Algebraic Equation: with an Examination and Extension of

Cauchy's Theorem on Imaginary Roots, and Remarks on the Proofs of the Existence of Roots given by Argand and by Mouray ». Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. X, part I, p. 261.

1858

XXXIV. Airy, « Suggestion of a Proof of the Theorem that every Algebraic Equation has a Root ». Transaction of the Cambridge Philosophical Society, vol. X, part I, p. 283.

1864

XXXV. Foscolo, « Sulla necessaria esistenza di una radice reale o imaginaria in ogni equazione algebrica ». Giornale di Matematiche, t. II, p. 13.

1867

XXXVI. Hankel, « Vorlesungen über die complexe Zahlen und ihre Functionen ». I Theil. Leipzig.

1868

XXXVII. Transon, « Démonstration de deux théorèmes d'algèbre ». Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. VII, p. 97.

1870

XXXVIII. Clifford, « Proof that Every Rational Equation has a Root ». Procedings of the Cambridge Philosophical Society, t. II, 1876, p. 156, oppure Mathematical Papers, London 1882, p. 20.

XXXIX. Kinkelin, « Neuer Beweis des Vorhandenseins complexer Wurzeln in einer algebraischen Gleichung ». Mathematische Annalen, I Bd. p. 502.

1871

XL. Walton, « A demonstration that Every Equation has a Root ». Quaterly Journal of Mathematics, t. XI, p. 178, oppure « Démonstration du thèorème de Cauchy *toute équation a une racine* ». (Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. X, p. 509).

1876

XLI. Gordan, « Ueber den Fundamentalsatz der Algebra ». Matematische Annalen, t. X, p. 572.

1877

XLII. Lipschitz, « Lehrbruch der Analysis ». I Bd. Bonn.

1878

XLIII. Hoüel, « Cours de Calcul infinitésimal », t. I, Paris.

XLIV. Macnie, « Proof of the Theorem that Every Equation has a Root ». The Analyst, vol. V, p. 80.

XLV. Malet, « On a Proof that every Algebraic Equation has a Root ». Transactions of the R. Irish Academy, vol. XXVI, p. 453.

1879

XLVI. König, « Die Factorenzerlegung ganzer Functionen und damit zusammenhöngende Eliminationsprobleme ». Matemat. Annalen, t. XV, p. 161.

1880

XLVII. Mansion, « Toute équation algébrique a une racine ». Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 4e année, oppure « Mélanges mathématiques (1874-1882) par P. Mansion » (Gand 1882).

XLVIII. Netto, « Beweis der Wurzelexistenz algebraischer Gleichungen ». Journal für Mathematik, t. LXXXVIII, p. 14.

1882 (1)

XLIX. Kronecker, « Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen ». Journal für Mathematik, t. XCII, p. 1 e seg.

L. Mandl, « Anzeiger der k. Akademie der Wissenschaften in Wien. » Mathem.-naturwiss. Classe. Sitzung vom 20 Juli.

LI. Stieltjes T. I. Ir., « Brevijs van de Stelling, dat en geheele rationale Functie altijd, voor zekere reëlle of complexe Waarden van de veranderlijke, de vaarde Nul aanneemt ». Nieuw Archief voor Wiskunde, Deel IX, p. 196.

LII. Walecki, « Démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques ». Comptes rendus, t. XCVI, p. 772.

1883

LIII. Dutordoir, « Toute équation algébrique a une racine; démonstration nouvelle » (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, VII année), oppure « Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques » (Comptes rendus, t. XCVII, p. 742).

---

(1) A quest'anno appartiene il lavoro dell'Hammond, *Proof that an Equation must have at least* n *Roots* (Educational Times, t. XXXVI, p. 115); ma non ce ne siamo occupati perchè il Netto (*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, t. XIV, p. 46) vi ha notato un errore gravissimo.

LIV. Hocks, « Ueber den Fundamentalsatz der algebraischen Gleichungen ». Zeitschrift für Mathematik und Physik, t. XXVIII, p. 123.

LV. Walecki, « Démonstration du théorème de D'Alembert ». Nouvelles Annales de Mathématiques, III série, t. II, p. 241.

1884

LVI. Rausenberger, « Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen einer Variabeln ». Leipzig.

LVII. Sockocki, « Rozwiezywanie ro᾽wnan liczebnych ». Warszawa.

1885

LVIII. Schmitz, « Die Erweiterung des Fundamentalsatzes der Algebra ». Blätter für das Bayer Gymnasialschulwesen, XXI Bd., p. 47.

LIX. Woodhouse, « Principio fundamental da theoria des equacoes algebraicas ». Jornal des Sciencias mathematicas e astronomicas, t. VI, p. 177.

1886

LX. Brisse, « Démonstration du théorème de D'Alembert ». Journal de l'Ecole polytéchnique, LVI cahier, p. 163.

LXI. Fields, « A Proof of the Theorem The Equation $f(z) = 0$ has a Root where $f(z)$ is any holomorphic function of z ». American Journal of Mathematics, t. VIII, p. 178.

LXII. Holst, « Beweis des Satzes dass jede algebraische Gleichung eine Wurzel hat ». Acta Mathematica, t. VIII, p. 155.

LXIII. Jourjon, « La divisibilité des fonctions entières démontrée sans les imaginaires ou la divisibilité de $F(x)$ par $(x-a)^2 + b^2$ ramenée à la divisibilité de $F(a+bz)$ par z^2+1 ». Paris.

LXIV. Perott, « Démonstration du théorème fondamental de l'algèbre ». Journal für Mathematik, t. XCIX, p. 141.

1887

LXV. Juel, « Om Argand's Bevis for Algebraes Fundamentalsaetning ». Tidssckrift for Mathematik, V serie, t. V, p. 161.

LXVI. Laisant, « Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des équations ». Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XV, p. 42.

1888

LXVII. Mertens, « Ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ». Sitzungberichte d. k. Akad. d. Wissenschaften zu Wien, XCVII Bd., Abtheil. II a. p. 1505.

1889

LXVIII. F. v. Dalgwigk, « Ueber einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ». Zeitschrift für Mathematik und Physik, XXXIV Bd. p. 185.

1890

LXIX. H. G. Zeuthen, « Bevis for, at en algebraisk Ligning altid has en Rod ». Nyt Tidsskrift for Mathematik, Bd. I, p. 65.

1891

LXX. E. Amigues, « Démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations ». Comptes rendus, 26 janvier, t. CXII, p. 212.

LXXI. E. Phragmén, « Ein elementarer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ». Oefversigt af Kongl. Vetenskapes-Akademiens Förhandlingar, 11 marzo 1891, p. 113.

Ancora sull'infinitesimo attuale.

Nota di G. Vivanti.

1. Le *Osservazioni* del Ch.^{mo} Prof. R. Bettazzi sopra il mio articolo: *Sull'infinitesimo attuale* (Riv., pag. 174-82) mi hanno convinto che il timore di essere troppo prolisso m'ha fatto riuscire oscuro in alcuni punti capitali della trattazione. Ed invero, se pure già non era nell'autore, s'ingenera almeno nei lettori delle *Osservazioni* l'idea, aver io trattato *un problema che non è problema*, e che si riduce a poco più d'un giuoco di parole o d'una questione d'opportunità. Trovo quindi necessario riprendere la parola in argomento, sopra tutto per mettere in luce *l'origine, l'importanza* e *la natura* del problema da me trattato, avvertendo per altro che nulla o quasi v'è di quanto dirò a questo proposito che non si trovi già più o meno brevemente accennato nel mio primo articolo.

2. La scienza umana, per sottoporre a misura ed a studio i fenomeni naturali, ha ritenuto necessario scomporli in fasi quanto è possibile piccole, e sostituire a queste altre fasi da esse poco dissimili, ma di natura più semplice. Il risultato ottenuto mercè tale sostituzione doveva riuscire tanto più prossimo al vero, quanto maggiore fosse stata la piccolezza delle fasi parziali, e quindi *infinitamente approssimato*, ossia *esatto,* ove la scomposizione si fosse spinta al di là di qualunque limite assegnabile. È facile comprendere come questa idea, che costituisce il

vero fondamento del calcolo infinitesimale, abbia nello stesso tempo dato origine al concetto dell'infinitesimo attuale considerato come quantità effettivamente esistente. Così dalla *finzione*, per cui ad una curva si sostituisce, per opportunità di calcolo, un poligono infinitilatero, è nata in alcuni la *illusione* di credere la curva composta in fatto di segmenti rettilinei attualmente infinitesimi. L'esistenza, o meglio la *concepibilità*, di quantità attualmente infinitesime, ammessa dagli uni, negata dagli altri, fu vivacemente discussa dai tempi di Leibniz sino al dì d'oggi, ma solo in questi ultimi tempi fu trattata coi mezzi forniti dalla matematica; epperò mi parve interessante esporre e riassumere questi studi recenti, che vengono a chiudere una questione pendente da due secoli.

3. Le quantità che hanno figurato esclusivamente nell'analisi, prima almeno che la moderna aura generalizzatrice venisse a soffiare su tutti i campi delle matematiche, sono quelle che costituiscono il substrato dei fenomeni naturali, cioè tempi, lunghezze, velocità, temperature, ecc. Quindi è soltanto entro il campo di queste quantità che si è agitata e deve tuttora agitarsi la questione a cui ho testè accennato; portarla fuori di esso sarebbe volerla snaturare. Ma quelle quantità hanno il carattere comune di potere essere ridotte ad un unico tipo scelto ad arbitrio fra esse; come tale può prendersi p. es. la classe dei segmenti rettilinei. Ecco perchè la questione può, senza danno della generalità, limitarsi a questa classe di grandezze. Pertanto il problema fondamentale del mio primo articolo: « Cercare se possa darsi un segmento attualmente infinitesimo » non è che una traduzione sotto forma più semplice della questione secolare e, direi, *classica* della esistenza di quantità infinitamente piccole costanti.

4. Ma l'importanza del problema, oltre che dalla sua origine, risulta anche dal nesso intimo che esso ha con una delle più antiche e dibattute questioni di filosofia naturale: quella della *costituzione del continuo.* Tale questione ha tentato i filosofi e i pensatori di tutti i tempi; e le teorie a cui ha dato luogo sono svariatissime. Esse possono tuttavia raggrupparsi intorno a quattro centri principali.

Secondo alcuni [1] la materia consta di particelle elementari indivisibili (atomi) aventi forme e dimensioni determinate.

---

[1] Filolao, Ecfanto, Leucippo, Democrito, Epicuro, Platone, Zenone stoico fra gli antichi; Descartes, Locke, E. More, Berkeley fra i moderni. Tracce di atomismo si trovano tra i Fenici.

Secondo altri [1] la materia è divisibile all'infinito, e i suoi elementi sono rigorosamente puntuali, privi d'estensione.

Altri ancora [2], non trovando soddisfacente alcuna di queste due ipotesi, sostengono essere l'estensione un puro fenomeno, e la realtà risiedere soltanto nella forza, quindi ogni corpo essere un aggregato di centri di forza, inestesi, ma atti a dar luogo al fenomeno dell'estensione.

Infine v'ha [3] chi considera il concetto di continuo come elementare e indecomponibile.

Al problema della costituzione del continuo corrisponde, nel campo puramente matematico, quello della natura degli elementi costituenti lo spazio geometrico. Ma qui non sono più applicabili le due ultime fra le 4 soluzioni accennate, e non resta quindi la scelta che fra le due prime, opportunamente modificate, o, come dissi nell'altro mio scritto, *idealizzate*. Gli elementi dello spazio geometrico possono cioè concepirsi, o rigorosamente puntuali ed inestesi, oppure aventi un'estensione, che, non potendo essere finita (perchè in tal caso sarebbe evidente la ulteriore divisibilità) dovrà ritenersi infinitesima [4]. E per limitare i nostri ragionamenti agli spazi ad una dimensione, tutto si riduce a stabilire se la retta sia composta di punti oppure di segmenti infinitesimi. Questo problema è subordinato all'altro dell'esistenza del segmento attualmente infinitesimo, inquantochè, risolto quest'ultimo in senso negativo, resta esclusa per sè la seconda delle due possibilità ammesse nel primo [5].

---

(1) L'atomismo fu combattuto principalmente da Aristotele, e dietro di lui dai Padri della Chiesa; più recentemente da Eulero. L'opinione, che la materia sia divisibile all'infinito, e che gli elementi di essa sieno inestesi, compare sotto varie forme presso i Pitagorici, Anassagora, Empedocle, Ruggiero Bacone, Galileo, Boscovich, Faraday, Ampère, Cauchy, Saint-Venant, Schopenhauer, G. Cantor, Lotze, ecc.

(2) Giordano Bruno, Leibniz, Maupertuis, Kant, i dinamisti moderni.

(3) Gli Eleatici, ai quali si accosta per molti punti Spinoza.

(4) V. p. es. l'opera già citata nel precedente articolo: Gutberlet, *Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet.*

(5) Du Bois-Reymond (*Die allg. Functionentheorie*, § 21 e segg.), procedendo in ordine inverso, comincia collo stabilire con argomenti non nuovi nè, a mio avviso, stringenti, che il punto non può essere l'elemento generatore della retta, e arriva poi, per logica necessità, alla conclusione che il segmento attualmente infinitesimo esiste. — Colgo quest'occasione per porre in guardia contro l'errore, facile a commettersi, che consisterebbe nel confondere l'infinitesimo propugnato dall'*idealista* di Du Bois-Reymond colle grandezze infinitesime introdotte nella scienza dallo stesso autore e di cui ho parlato nel § 12 del mio scritto. Il primo è, per dirlo

5. Dopo aver così rilevato l'origine e l'importanza del problema, resta da esaminarne la vera natura. A questo scopo devo richiamare le cose dette sopra nel § 3.

La scelta della classe dei segmenti rettilinei, in confronto di qualunque altra classe di grandezze analoghe, come campo in cui studiare la questione dell'esistenza dell'infinitesimo, ci fu suggerita dal fatto che quella classe (che per brevità designerò con A) non solo è forse la più comune fra tutte le classi di grandezze (ad una dimensione) che compaiono nello studio dei fenomeni naturali, ma può comodamente servire quale tipo di tutte queste. Or bene, poichè noi ci troviamo di fronte ad un problema [1] che si aggira nel campo della classe A, occorre anzitutto definirla rigorosamente, e cioè:

a) Cercare quali proprietà caratteristiche, evidenti e indiscutibili le appartengano;

b) Tradurre queste proprietà in linguaggio matematico.

Sul modo di rispondere a questi due quesiti non v'ha in sostanza alcun disaccordo fra il Prof. Bettazzi e me. La proprietà caratteristica della classe A (od almeno la sola proprietà della medesima che ora c'interessa) è di essere continua; e la continuità si traduce nelle due condizioni, di essere la classe A connessa e chiusa. La divergenza comincia là dove si tratta di stabilire il valore da attribuirsi a tali risposte, particolarmente alla prima. E poichè qui sta veramente il nodo della questione, credo utile riportare quanto scrive in proposito il Prof. Bettazzi (§ 2):

« In questa scelta ci possiamo lasciar guidare o da concetti pura-
« mente teorici o dal desiderio di avere un segmento che meglio renda
« alla mente il fatto di retta e di sue parti che si ha nella pratica
« comune. In questo secondo modo di vedere sembra che sia l'autore:
« ed allora, poichè è chiaro che fra i postulati da porsi per il segmento
« v'è il postulato d'Archimede, il quale equivale all'altro che la classe
« dei segmenti è connessa, giacchè senza di esso si avrebbero fatti
« ammissibili in teoria, ma non del tutto rispondenti a ciò che si ri-
« scontra in pratica, *almeno dentro i limiti delle nostre osservazioni*,
« si conclude, come giustamente avverte l'autore, che il segmento

---

con una sola parola, l'infinitesimo *classico* (V. i passi del Du Bois-Reymond riportati nella nota 5ª del mio scritto); le seconde sono grandezze di natura più generale analoghe a quelle considerate da Stolz.

[1] Ho detto a studio: *un problema*, per metter bene in luce questa circostanza: che nel definire la classe A noi non dobbiamo aver alcun riguardo alla qualità ed alla natura dei problemi che avremo a risolvere relativamente ad essa.

« rettilineo attualmente infinitesimo non esiste. La conclusione che
« deve dunque trarsi è questa:

« Se si vuole che il segmento sia un ente che si adatti agli usi « che si fanno nelle ordinarie applicazioni, stando a ciò che si osserva « dentro i limiti di osservazione che ci sono concessi, e quindi se si « vuole che la classe dei segmenti sia connessa, il segmento infinite- « simo non esiste.

« Qualora per altro si ritenga che il campo delle nostre osservazioni « sia troppo ristretto per poter giudicare se meglio ci si accosti alla « realtà con l'ammettere che la classe dei segmenti sia connessa piut- « tosto che con l'ipotesi opposta, resterà insoluta la questione dell'infi- « nitesimo; e questo esisterà quando si creda opportuno di ammettere « per postulato che la classe dei segmenti *non* è connessa.

« Un tale dubbio non sembri strano, poichè esempi simili non « sono nuovi nella scienza: basta pensare al postulato di Euclide sulle « parallele ».

In sostanza, secondo il Bettazzi, la continuità della classe A (e quindi la validità nella stessa del postulato d'Archimede) è un risultato dell'esperienza, che, come tale, può domani venire contraddetto da osservazioni più accurate.

È giusto questo modo di vedere?

La questione, pur restando inalterata, apparirà meglio nella sua vera luce se come tipo delle quantità di cui nel § 3 prenderemo, non più la linea, ma il tempo. V'ha un fatto su cui non può cadere disaccordo, ed è, che la continuità del tempo non è fondata sull'esperienza, nè potrebbe esserlo, giacchè l'idea stessa di tempo non risulta dalla osservazione, ma è bensì una delle idee che costituiscono le condizioni necessarie per la possibilità di qualsiasi osservazione empirica (¹). In altre parole, non sono già le nostre *limitate osservazioni* che ci dicono il tempo essere continuo; e la nostra mente che si rifiuta a concepirlo in modo diverso, che non è capace di seguire il tempo che scorre da uno ad un altro istante senza passare per tutti gli istanti intermedi. E ciò che si dice del tempo può ripetersi delle lunghezze (²),

---

(¹) Si rammenti la teoria dello spazio e del tempo di Kant, teoria che, al dire di Schopenhauer, costituisce forse il più grande servigio reso da Kant alla filosofia.

(²) La linea, quale appare il più sovente nel calcolo infinitesimale, e specialmente quando è posta a rappresentare l'andamento d'una variabile, è un ente piuttosto meccanico che geometrico, e cioè figura più che altro come traiettoria d'un punto mobile. Ora il moto è appunto uno di quei concetti a cui la nostra mente non sa negare l'attributo della continuità.

velocità, temperature, ecc. Ben dissi dunque sopra che la questione, meglio che sulla esistenza, versa sulla *concepibilità* dell'infinitesimo nel campo delle quantità ordinarie. E la questione è ben presto risolta: poichè la continuità esclude l'esistenza dell'infinitesimo, e poichè essa è il carattere fondamentale delle quantità di cui nel § 3, ne segue che i tempi, le lunghezze, le temperature, ecc., attualmente infinitesime, sono enti assurdi, inconcepibili (*unmögliche, d. h. in sich widersprechende Gedankendinge*, come dice Cantor). Fin che la mente umana resta la stessa, questa conclusione non può mutare; nulla v'ha a sperare nè a temere da future e più perfette osservazioni.

Così non è del postulato delle parallele, il quale invece si fonda realmente sull'esperienza; epperò il paragone fra i due casi non regge. E si può citare come fatto caratteristico, che Helmholtz, uno dei più caldi sostenitori dell'origine empirica degli assiomi geometrici, dichiara ripetutamente le sue idee non essere punto in opposizione col concetto kantiano di tempo e spazio.

6. Non mi resta ora che da passare in rivista le obiezioni di dettaglio mossemi dal mio egregio contradditore.

Riguardo a ciò che egli dice nel § 1 osserverò che, enunciando la questione sotto la forma: « Esiste l'infinitesimo attuale? », ho creduto inutile specificare il campo in cui esso doveva cercarsi, dacchè di ciò appunto si viene a discorrere poche righe più sotto. Del resto è naturale che, presa la domanda in tutta la sua generalità, si debba rispondere ad essa affermativamente; ed appunto per mettere in chiaro ciò io ho recato nel § 12 alcuni esempi di grandezze infinitesime.

7. Nel § 3 il Prof. Bettazzi fa alcune osservazioni sulla dimostrazione di Cantor (dimostrazione sulla quale, a dir vero, non è agevole discutere, essendo essa incompleta).

Anzitutto, secondo il Bettazzi, non è provato che i numeri trasfiniti sono la più alta espressione del numero, ed è una pura asserzione quella di Cantor, che si possa con essi arrivare a tutte le potenze diverse che s'incontrano nella natura materiale ed immateriale. — Per mostrare che ciò non è esatto, basta rammentare che cosa sia un numero trasfinito. Un numero trasfinito non è altro che il concetto che si ottiene da un insieme ben ordinato facendo astrazione dalla natura speciale dei suoi elementi; per modo che a qualunque insieme ben ordinato corrisponde *ipso facto* un numero trasfinito [1]. Ora nel caso

[1] I due cosidetti *principî di generazione* non servono propriamente a creare i numeri trasfiniti, ma piuttosto a determinare le relazioni funzionali che hanno luogo fra di loro.

nostro abbiamo a fare appunto con un insieme ben ordinato, e cioè con una serie di segmenti infinitesimi tutti eguali disposti l'uno di seguito all'altro sopra una linea retta; quindi, per quanto sia estesa la serie dei segmenti, sempre v'ha un numero trasfinito che la rappresenta.

Il secondo appunto del Bettazzi riguarda il concetto di grandezza lineare adottato da Cantor; concetto che, secondo lui, non è nè il più giusto nè il più opportuno. Esaminiamo bene questo concetto, e vediamo su che esso si fondi.

Come già dissi (§ 4), un segmento lineare può immaginarsi come *composto*, o di punti, o di segmenti infinitesimi. Il carattere che distingue tra loro tali due specie di elementi è questo, che il punto non ha dimensioni, mentre il segmento ha una lunghezza. In altre parole: noi non sappiamo concepire che si possa porre un punto immediatamente accanto ad un altro senza che i due coincidano, mentre al contrario la giustapposizione di più segmenti dà luogo alla formazione di un segmento composto dei medesimi e diverso da ciascuno di essi. Ecco che cosa significa, a mio credere, l'espressione di Cantor, che secondo il concetto di grandezza lineare ciascuna di tali grandezze deve immaginarsi come parte integrante di altre analoghe. E la dimostrazione di Cantor si riduce a far vedere che il segmento infinitesimo, se esistesse, sarebbe privo di questa proprietà caratteristica, sicchè nulla più lo distinguerebbe dal punto inesteso.

8. Nel § 4, che si riferisce al § 10 del mio articolo, il Prof. Bettazzi, dopo aver riconosciuta inesatta la pretesa dimostrazione dei sostenitori dell'infinitesimo attuale, trova pure inesatta la mia controdimostrazione, e ciò per due motivi. Anzitutto, egli dice, « chi ci « permette di concludere che $\frac{s}{i} = \frac{s}{i_1}$ per il solo fatto che sono uguali « entrambi ad s, e quindi fra loro, le somme degli i segmenti $\frac{s}{i}$ e « degli i_1 uguali ad $\frac{s}{i_1}$ e che tanti sono i termini della prima quanti « quelli della seconda somma, teorema questo di cui siamo sicuri solo « quando i ed i_1 sono numeri finiti? » Ed aggiunge l'esempio di una semiretta, che può risolversi in un aggregato numerabile di segmenti eguali tutti ad m, come pure in un aggregato simile di segmenti eguali tutti ad n, essendo $m \gtrless n$.

Che questo esempio non regge, è cosa evidente, giacchè la semiretta è un segmento infinito, mentre s per ipotesi è un segmento fi-

nito [1]. E che possa realmente concludersi dover essere $\frac{s}{i} = \frac{s}{i_1}$ risulta da ciò che, se i supposti segmenti $\frac{s}{i}$ ed $\frac{s}{i_1}$ fossero diseguali ne seguirebbe facilmente dover essere s eguale ad una parte di sè stessa, ciò che è contrario alla proprietà caratteristica dei segmenti finiti (V. il § 3 del mio scritto).

La seconda obiezione consiste in questo, che la dimostrazione del teorema di Cantor, al quale io ricorro, si fonda sul postulato di Archimede. L'osservazione è giusta, ma la mia dimostrazione sussiste anche indipendentemente da quel teorema, purchè per i ed i_1 si prendano due numeri trasfiniti d'una stessa classe, giacchè pel mio assunto basta stabilire che due divisioni *differenti* del segmento s danno luogo a parti aliquote eguali.

Del resto il contenuto del § 10 non ha che un'importanza secondaria nella mia trattazione, epperò credo inutile trattenermivi più a lungo.

9. Finalmente per rispondere ad un appunto che si legge nel § 5 delle *Osservazioni*, dirò che, se la frase che si trova in principio del mio § 12 non è per sè abbastanza chiara, il resto del lavoro è là a togliere ogni equivoco in proposito.

10. Termino questo scritto esprimendo la lusinga che esso varrà a spandere un po' di luce sui punti oscuri del mio articolo, e ringraziando il Ch.mo Prof. Bettazzi per avermi offerto l'occasione di esporre più diffusamente le mie idee sull'importante problema dell'esistenza dell'infinitesimo attuale.

Mantova, 20 Ottobre 1891.

---

[1] Il fatto, che le proprietà geometriche sono indipendenti dalle dimensioni assolute degli enti a cui esse appartengono, non sussiste più ineccepibilmente quando si esce dal campo finito. Nulla prova che quanto può dirsi per un segmento infinito possa applicarsi senz'altro ad un segmento finito, e viceversa. È strano, che coloro i quali si servono di questa similitudine illegittima, di questa *riduzione di scala* abusiva, non ne approfittino per dimostrare con poca fatica che il segmento infinitesimo esiste. Basterebbe osservassero, che un segmento infinitesimo è sopra una retta finita, come un segmento finito sopra una retta infinita !

Sul concetto di numero.

Nota II di G. Peano.

Nella precedente nota si è analizzato il concetto di numero intero, e si sono esposte le proprietà fondamentali di questi numeri, in relazione alle operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione. Uno dei risultati cui pervenni si è che le questioni:

« Si può definire il numero, la somma di due numeri? »

« Si può dimostrare che la somma ha la proprietà commutativa? »

così enunciate, non ammettono soluzione scientifica. L'ammettono invece quando si enunciano sotto la forma:

« Si può definire il numero, mediante un dato sistema di idee? »

« Si può dimostrare una proprietà commutativa, mediante un dato sistema di proprietà? »

e la risposta dipende dal sistema di idee, o di proposizioni date.

Le stesse questioni ammettono pure soluzione nel campo pratico, ove si enuncino così:

« Si può definire l'idea di numero, mediante idee più semplici? »

« Si può la proprietà commutativa dedurre da proprietà più semplici? »

E a queste domande si possono dare dai varii autori differenti risposte, potendosi diversamente intendere la semplicità. Per mio conto la risposta alla prima si è che il numero (intero positivo) non si può definire (poichè le idee di ordine, successione, aggregato, ecc., sono altrettanto complesse come quella di numero) [1]. La risposta alla seconda questione è stata affermativa.

---

[1] Il Prof. R. Bettazzi, nella sua opera *Teoria delle grandezze* (Pisa, 1890), opera già favorevolmente nota nel campo scientifico, giunge, a quanto pare, a un risultato diverso. Egli invero premette la teoria delle grandezze, avvertendo più volte (pag. 9, pag. 11) che il concetto di numero si suppone *completamente ignoto;* e solo a pag. 65 introduce esplicitamente il concetto di numero, e a pag. 84 quello di numero intero e positivo. Ma invece il concetto di numero intero già comparisce più o meno esplicito nelle prime pagine del suo lavoro. Così a pag. 7 trovasi « un'operazione, la quale eseguita *su più oggetti* A, B,... d'una certa categoria... »; a pag. 9: « Se una grandezza è il risultato della operazione S eseguita su una grandezza A, *considerata più volte* »; a pag. 22: « Le classi ad una dimensione contengono un *numero infinito* di grandezze disuguali », e così via. Del resto il concetto di numero (N) è così semplice e fondamentale, che

E ora continuiamo il rapido esame delle altre questioni dell'Aritmetica, continuando la numerazione dei §§ incominciata nella nota precedente.

§ 8. — Divisione.

Ci limiteremo alla sola definizione:

$$a \varepsilon \mathrm{n} \,.\, a -= 0 \,.\, b \varepsilon \mathrm{n} \times a : \supset .\, b/a = \mathrm{n} \,\overline{x \varepsilon}\, (ax = b) \qquad \text{[Def.]}$$

« Se a è un numero intero, non nullo, e se b è un multiplo di a, con b/a intendiamo il numero (intero) x tale che $ax = b$ ».

Ricordiamo che $\mathrm{n} \times a$ indica i multipli positivi e negativi, lo zero compreso, di a; invece $\mathrm{N} \times a$ indica i multipli positivi di a. Quindi la relazione « b è multiplo di a » si può esprimere coi segni introdotti scrivendo $b \varepsilon \mathrm{n} \times a$. Volendosi esprimere in simboli le proposizioni elementari della teoria dei numeri, converrà introdurre dei segni per indicare le frasi « massimo comun divisore » e « minimo comune multiplo ».

Delle notazioni proposte la più semplice è quella adottata dal compianto Lucas, *Théorie des nombres,* 1891, pag. 345, il quale scrive:

---

ritengo difficile il trovare un ragionamento un po' lungo, di qualunque siasi scienza, in cui esso non compaia.

Nell'appendice al suo lavoro, intitolata *Teoria analitica del numero,* l'A. dà, com'egli dice, solo un cenno del come si possano introdurre i numeri in modo puramente analitico. Introduce appunto, senza definirli, i tre concetti fondamentali di numero, di unità e di successivo d'un numero. Però non enuncia tutte le proprietà che questi enti debbono avere. Così non enuncia la legge di induzione (§2P5 della mia nota precedente), di cui si serve in seguito più volte.

Presenta gli stessi inconvenienti lo scritto dello stesso A., *Sul concetto di numero* (Periodico di matematica per l'insegnam. secondario, anno II). Invero, al n. 19, volendosi ottenere il numero intero positivo colla considerazione di *grandezze discrete,* cioè quelle che *risultano da aggregati di oggetti considerati uguali,* afferma che se ad ogni oggetto dell'aggregato A si può collegarne uno ed uno solo della classe B, e viceversa, non può avvenire che si possa far corrispondere ogni oggetto di A uno solo e distinto in B, in modo che ne avanzino in B.

Ora siffatta proposizione vale solo per le classi contenenti un *numero finito* di elementi, poichè per es. si può far corrispondere ai numeri interi (classe B) i loro doppi (classe A), e la classe A è contenuta in B, senza esserle uguale. Ed esaminando la dimostrazione dell'A. si vede che si ricorre a proposizioni su permutazioni, che sussistono solo trattandosi di oggetti in numero finito.

D(a, b,...) per indic. « il massimo comun divisore dei numeri a, b,... »
e m(a, b,...) » « il minimo comune multiplo » »

Conviene ancora introdurre un segno per indicare la relazione « a è primo con b » (ch'io altrove indicai con $a \pi b$); e un segno per dire « numero primo », e sia Np. Per indicare la congruenza possiamo servirci della notazione di Gauss:

$$a \equiv b \quad (\text{mod. } k),$$

ovvero, senza introdurre un segno nuovo, possiamo scrivere

$$a - b \,\varepsilon\, \mathrm{n} \times k \,, \quad a \,\varepsilon\, b + \mathrm{n} \times k.$$

Con questi pochi segni si possono esprimere quasi tutte le proposizioni della teoria dei numeri.

§ 9. — Enumerazione.

In questo § si analizzano alcuni concetti comuni, riducendoli a quelli finora studiati.

Essendo a una classe, con num a intenderemo « il numero degli individui della classe a ». Definiremo questo numero, e ne enuncieremo le proprietà.

Per semplificare le formule conviene poter scomporre il segno $=$, che esprime *è eguale,* nelle sue due parti, cioè *è*, che è indicato con ε, ed *eguale,* che indicheremo con ι (iniziale greca di *eguale*). Sicchè essendo a un individuo qualunque, ιa significa « eguale ad a » e rappresenta la classe degli enti eguali ad a; e la scrittura $b \,\varepsilon\, \iota a$ significa $b = a$.

Definizione di num a:

1. $a \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, \supset : \mathrm{num}\, a = 0 \,.\, = .\, a = \Lambda$

2. $a \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, m \,\varepsilon\, \mathrm{N} : \supset :: \mathrm{num}\, a = m \,.\, = .\!\cdot\!.\, a - = \Lambda : x \,\varepsilon\, a \,.\, \supset_x .$
   $\mathrm{num}\,(a - \iota x) = m - 1$

« Essendo a una classe, dire che il numero degli a è 0 significa che la classe a è nulla ».

« Essendo a una classe, dire che il numero degli a è un numero m, significa che la classe a non è nulla, e che, preso ad arbitrio un individuo x nella classe a, il numero degli a non eguali ad x è $m - 1$ ».

Facendo, nella 2, $m = 1$, e tenendo conto della 1, si ottiene la definizione di num $a = 1$:

$a \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, \supset :: \mathrm{num}\, a = 1 \,.\, = .\!\cdot\!.\, a - = \Lambda : x \,\varepsilon\, a \,.\, \supset_x .\, a - \iota x = \Lambda$, ovvero
» » » $.\, a \supset \iota x$
» » » $(y \,\varepsilon\, a \,.\, \supset_y .\, y = x)$

che si trasforma in:

$a \varepsilon \mathrm{K} . \supset :: \mathrm{num}\, a = 1 . = .\cdot . \, a - = \Lambda : x ,\ y \varepsilon a . \supset_{x,y} . x = y$

« dire che il numero degli a vale 1, significa che la classe a non è nulla, e che se x e y sono individui della classe a, sarà $x = y$ ».

Facendo nella 2, $m = 2$, si ottiene la definizione di $\mathrm{num}\, a = 2$, e così via.

Data una classe a non sempre $\mathrm{num}\, a$ è un N, poichè N non comprende nè lo zero, nè l'infinito. Quindi la proposizione $\mathrm{num}\, a \varepsilon \mathrm{N}$ significa « la classe a esiste effettivamente ed è finita, cioè contiene un numero finito di oggetti ».

Raccoglierò ora alcune proposizioni sull'enumerazione, affatto elementari, analizzandole onde tradurle in simboli.

3. $a,\ b \varepsilon \mathrm{K} . \mathrm{num}\, a,\ \mathrm{num}\, b \varepsilon \mathrm{N} . ab = \Lambda : \supset . \mathrm{num}\, (a \cup b) = \mathrm{num}\, a + \mathrm{num}\, b.$

« Essendo a e b due classi non nulle e finite, non aventi alcun individuo comune, allora il numero degli individui appartenenti all'insieme delle due classi a e b vale la somma dei numeri degli a e dei b ».

La proposizione sussiste anche se $\mathrm{num}\, a = 0$, o $\mathrm{num}\, b = 0$. Essa sussiste pure se le classi contengono infiniti individui, purchè si facciano le solite convenzioni $x + \infty = \infty + x = \infty$; $\infty + \infty = \infty$.

4. $a,\ b \varepsilon \mathrm{K} . b \supset a . b - = \Lambda . b - = a . \mathrm{num}\, a \varepsilon \mathrm{N} : \supset : \mathrm{num}\, b \varepsilon \mathrm{N} . \mathrm{num}\, b < \mathrm{num}\, a.$

« Se delle classi a e b la seconda è contenuta nella prima, e la classe b non è nulla, e non è eguale ad a, e se il numero degli a è finito, allora anche il numero dei b è finito, ed è minore del numero degli a ».

Questa proposizione cessa di sussistere se $\mathrm{num}\, a = \infty$.

5. $m \varepsilon \mathrm{N} . \supset . \mathrm{num}\, [\mathrm{N} \cap (m - \mathrm{N})] = m - 1$

« Essendo m un numero intero positivo, il numero dei numeri interi positivi, minori di m, è $m - 1$.

Vogliamo tradurre in simboli la proposizione seguente:

« Se si hanno p classi distinte, ciascuna delle quali contenga q individui, l'insieme di quelle classi conterrà $p \times q$ individui ».

Sarà a questo uopo conveniente introdurre la seguente notazione:

6. $u \varepsilon \mathrm{KK} . \supset . \cup ' u = \overline{x \varepsilon} (x \varepsilon y . y \varepsilon u : - =_y \Lambda).$

« Essendo u una classe di classi, ossia un sistema di classi, con $\cup ' u$ (che si può leggere *la somma delle classi* u) si intende l'insieme degli x tali che esiste una classe y del sistema u, contenente l'x come individuo; cioè l'insieme degli x che sono individui di qualche classe del sistema u ».

Benchè pel nostro scopo immediato non ci occorra, può essere utile in altre ricerche indicare con un segno, e sia $\frown{}'u$ la classe comune alle classi del sistema, cioè il loro prodotto:

$$6'.\ u \,\varepsilon\, \mathrm{KK} \,.\, \supset .\, \frown{}'u = \overline{x\,\varepsilon}(y \,\varepsilon\, u \,.\supset_y .\, x \,\varepsilon\, y)$$

Tornando alla nostra questione, la proposizione enunciata diventa:

$$7.\ u \,\varepsilon\, \mathrm{KK} \,.\, p,\ q \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \mathrm{num}\, u = p : x \,\varepsilon\, u \,.\supset_x .\, \mathrm{num}\, x = q \,.\!\cdot\!.\, x, y \,\varepsilon\, s \,.\, x -\!= y : \supset_{x,y} .\, xy = \Lambda :: \supset .\, \mathrm{num} \smile{}'u = p \times q$$

« Se u è una categoria di classi, e il numero delle classi della categoria u è p; e se qualunque si sia la classe x del sistema u, il numero degli x è costante ed eguale a q, e se prese ad arbitrio due classi x e y del sistema u, non identiche, esse non hanno alcun individuo comune, allora il numero di tutti gli individui delle classi del sistema u è $p \times q$ ».

Il segno « num » è un segno d'operazione che ad ogni classe fa corrispondere o un N, o lo 0, o l'∞; ossia

$$\mathrm{num} \,\varepsilon\, (\mathrm{N} \cup \iota 0 \cup \iota \infty) / \mathrm{K}$$

Esso si può invertire, e la relazione $\mathrm{num}\, a = p$ si può scrivere $a \,\varepsilon\, \overline{\mathrm{num}}\, p$, « la a è una classe contenente p individui ».

$$8.\ a,\ b \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, f \,\varepsilon\, b|a \,.\, g \,\varepsilon\, a|b : \supset .\, \mathrm{num}\, a = \mathrm{num}\, b.$$

« Essendo a, b due classi, se esiste una relazione f che ad ogni a fa corrispondere un b, e se esiste una relazione g che ad ogni b fa corrispondere un a, allora le classi a e b contengono lo stesso numero di oggetti ». Sussiste pure la proposizione inversa, supposto che le classi considerate siano finite.

Se si enuncia però in generale la relazione:

$$9.\ a,\ b \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, \supset :: \mathrm{num}\, a = \mathrm{num}\, b \,. = .\!\cdot\!.\, f \,\varepsilon\, b|a \,.\, g \,\varepsilon\, a|b : -\!=_{f,g} \Lambda$$

« Le due classi a e b hanno lo stesso numero, se si può far corrispondere ad ogni a un b, e ad ogni b un a », allora può avvenire che si abbia $\mathrm{num}\, a = \infty$ e $\mathrm{num}\, b = \infty$, senza che sia $\mathrm{num}\, a = \mathrm{num}\, b$; così si tocca la teoria delle varie potenze (Mächtigkeiten) del CANTOR.

Vogliamo ancora analizzare i concetti di *combinazione* e analoghi. Essendo s una classe, allora una combinazione degli s è precisamente una classe degli s. Quindi

$$\mathrm{K}s = (\text{combinazione degli } s).$$

Per indicare « combinazione degli s a k a k » possiamo quindi scrivere $(\mathrm{K}s)\, \overline{\mathrm{num}}\, k$, cioè una classe degli s in numero di k.

Nei concetti di *disposizione* e *permutazione* sta racchiuso quello di *ordine*. Onde analizzarli indicheremo con Z_r, ove r è un intero, la

classe dei numeri interi 1, 2,... r. Questa definizione di Z_r si traduce in simboli in questo modo:

$$10. \begin{cases} Z_1 = \iota 1 \\ r \varepsilon N . \supset . Z_{r+1} = Z_r \cup \iota (r+1) \end{cases}$$

« Z_1 è la classe costituita dal solo numero 1; e se r è un numero, con Z_{r+1} intendiamo la classe che si ottiene dalla Z_r aggiungendovi ancora il numero $r+1$ ».

Allora, essendo s una classe di oggetti, le *disposizioni complete* di questi oggetti ad r ad r sono i varii modi con cui si può stabilire una corrispondenza fra i numeri Z_r e gli oggetti s; ossia

(disposizioni complete degli s a r a r) $= s|Z_r$

Per definire le disposizioni ordinarie, conviene introdurre il concetto di corrispondenza *simile* (per abbreviazione « sim »); porremo

11. $a, b \varepsilon K . f \varepsilon b|a : \supset :: f \varepsilon \mathrm{sim} .\because x, y \varepsilon a . x -= y : \supset_{x, y} . fx -= fy$.

« Essendo a e b delle classi, ed f una corrispondenza degli a nei b, allora si dice che questa è simile, se a due individui diversi della classe a corrispondono individui pure diversi ».

E allora si avrà:

(disposizioni ordinarie degli s a r a r) $= (s|Z_r)$ sim.

Quindi le permutazioni dei numeri 1, 2,... r sono indicate da $(Z_r|Z_r)$ sim.

§ 10. — Numeri razionali.

Essendo m e p, degli interi, e q un intero positivo (o almeno non nullo), se p è multiplo di q, supponiamo dimostrato che il prodotto $m \times (p|q)$ vale $(m \times p)|q$, ossia:

1. $m, p \varepsilon n . q \varepsilon N . p \varepsilon n \times q : \supset . m \times (p|q) = (m \times p)|q$.

Quando invece p non è multiplo di q, la scrittura $m \times (p|q)$ non ha senso, non avendo senso la sua parte $p|q$; invece il secondo membro dell'eguaglianza può ancora avere significato, il che avviene se $m \times p$ è multiplo di q. In questo caso noi assumeremo quella eguaglianza come definizione del primo membro, ossia porremo

2. $m, p \varepsilon n . q \varepsilon N . p -\varepsilon n \times q . m \times p \varepsilon n \times q : \supset . m \times (p|q) = (m \times p)|q$ [Def.]

Così è definito il prodotto d'un intero per un'espressione della forma $p|q$, ove $p \varepsilon n$ e $q \varepsilon N$. Scriveremo R al posto di « numero razionale positivo », e r al posto di « numero razionale ». Avremo quindi:

3. $R = N|N$; $r = n|N$ [Def.]

Si può agevolmente dimostrare che « se a e b sono due numeri razionali, si può sempre determinare un intero m in guisa che i prodotti ma e mb siano numeri interi », cioè:

4. $a, b \varepsilon \mathrm{r} . \supset .\cdot. m \varepsilon \mathrm{N} . ma, mb \varepsilon \mathrm{n} : - =_m \Lambda$.

Due razionali a e b diconsi *eguali*, se qualunque si sia l'intero m, purchè ma e mb siano interi, si ha $ma = mb$:

5. $a, b \varepsilon \mathrm{r} . \supset .\cdot. a = b . = : m, ma, mb \varepsilon \mathrm{n} . \supset_m . ma = mb$.

Per definizione della somma $a + b$ di due razionali, ovvero dell'eguaglianza $a + b = c$, si può assumere « se, qualunque si sia l'intero m, purchè ma, mb ed mc siano interi, si ha $ma + mb = mc$ », ossia:

6. $a, b, c \varepsilon \mathrm{r} . \supset .\cdot. a + b = c . = : m, ma, mb, mc \varepsilon \mathrm{n} . \supset_m .$
$ma + mb = mc$

E pel prodotto

7. $a, b, c \varepsilon \mathrm{r} . \supset .\cdot. ab = c . = : m, ma, (ma)b, mc \varepsilon \mathrm{n} . \supset_m .$
$(ma)b = mc$.

Le altre operazioni si definiscono senza difficoltà.

Il concetto di frazione si ottiene in molte opere con considerazioni su grandezze concrete.

Volendo costituire l'analisi col solo concetto di numero intero, dice J. Tannery (*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Paris 1886, pag. VIII) « une fraction ne peut pas être regardée comme « la réunion de parties égales de l'unité; ces mots *parties de l'unité* « n'ont plus de sens; une fraction est une ensemble de deux nom- « bres entiers, rangés dans un ordre déterminé; sur cette nouvelle « espèce de nombres il y a lieu de reprendre les définitions de l'éga- « lité, de l'inégalité et des opérations arithmétiques ». Veggasi pure: Meray, *Théorie élémentaire des fractions dégagée de toute considération impliquant soit la subdivision de l'unité abstraite, soit l'intervention des grandeurs concrètes* (Nouvelles Annales de Mathém., 1889, p. 421).

Nelle formule precedenti la frazione $p|q$ si è considerata come il segno dell'operazione « moltiplicare per p e dividere per q ». Quindi due frazioni $p|q$ e $p'|q'$ diconsi eguali, se eseguite le operazioni che esse indicano su uno stesso intero, producono risultati eguali.

Alcuni autori (1) definiscono l'eguaglianza di due fratti $p|q$ e $p'|q'$ mediante l'equazione $pq' = p'q$, la somma mediante la $p|q + p'|q' = (pq' + p'q) | (qq')$ ecc. Ma queste definizioni paionmi meno semplici.

Risulta dalle cose dette che la frazione $p|q$ non è esattamente la coppia di numeri p, q; poichè due coppie p, q e p', q' sono identiche,

(1) Stolz, *Vorlesungen über Arithmetik*, 1885, I, p. 43.

quando $p = p'$ e $q = q'$. Bensì ad ogni coppia p, q si fa corrispondere un nuovo ente, indicato con p/q, e due di questi enti diconsi eguali quando soddisfano ad una certa condizione. Quindi la frazione è ciò che si ottiene per via d'astrazione dalle coppie di numeri, considerando le proprietà comuni alle coppie definite eguali.

Siffatto processo, con cui, data una classe di enti, si definisce su essi un'eguaglianza diversa dall'identità, e colle proprietà comuni ai varii enti definiti eguali si *crea* un nuovo ente, è assai comune in matematica.

Così dal fatto che la relazione di parallelismo di due rette gode delle proprietà dell'eguaglianza (V. *Formule di Logica matematica*, § 5, prop. 1, 2, 3; in questo volume a pag. 31), ad ogni retta si fa corrispondere un nuovo ente, chiamato *direzione* di essa, e due rette diconsi avere la stessa direzione se sono parallele. Ritroveremo questo processo nel § che segue.

§ 11. — Numeri reali.

Scriveremo Q invece di « numero reale positivo » e q invece di « numero reale determinato e finito ». Quindi q contiene i numeri razionali e irrazionali.

Fra i varii metodi per definire i numeri irrazionali, il più interessante, a mio avviso, è quello proposto dal Dedekind, nel suo opuscolo: *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Braunschweig, 1872). L'idea del metodo è contenuta nel *Trattato d'Aritmetica* del Bertrand (V. la versione italiana del 1862, pag. 185); e forse si può rimontare ancora ad epoche anteriori, analizzando il concetto antichissimo di numero irrazionale.

Il Dedekind dice (pag. 19): « Data una divisione del sistema R in « due classi, A_1 e A_2, aventi solamente la proprietà caratteristica che « ogni numero di A_1 è minore di ogni numero di A_2, noi per brevità « chiameremo questa divisione una sezione, e la indicheremo con « (A_1, A_2).

(Pag. 21). « Ora, se si ha una sezione (A_1, A_2), la quale non è « prodotta da alcun numero razionale, noi *creeremo* un nuovo numero, « un numero *irrazionale* α, che considereremo come completamente « definito da questa sezione (A_1, A_2) ».

In seguito definisce l'eguaglianza dei due numeri determinati dalle classi (A_1, A_2) e (A_1', A_2').

Analizziamo questo modo di *creare* (*erschaffen*) l'irrazionale, e traduciamolo in simboli di logica. Il dire che (A_1, A_2) è una sezione significa:

$$A_1, A_2 \,\varepsilon\, \mathrm{K} . A_1 - = \Lambda . A_2 - = \Lambda . A_1 \cap A_2 = \Lambda . A_1 \cup A_2 = \mathrm{R} .\therefore x \,\varepsilon\, A_1 . y \,\varepsilon\, A_2 : \supset_{x, y} . x < y$$

« A_1 e A_2 sono classi, non nulle, non aventi alcun individuo comune, formanti insieme la classe dei numeri razionali, e preso ad arbitrio un individuo x nella prima, ed uno y nella seconda, si ha $x < y$ ».

Ad ogni sezione (A_1, A_2) si fa corrispondere un ente, che l'autore chiama *numero definito da quella sezione*, e che io indicherò per un istante con $\mathrm{def}(A_1, A_2)$; si definisce quand'è che questo nuovo ente è eguale ad un numero razionale a:

$$a = \mathrm{def}(A_1, A_2) . = .\therefore x \,\varepsilon\, A_1 . \supset_x . x \leqq a : y \,\varepsilon\, A_2 . \supset_y . y \geqq a$$

« Si dice che a è il numero definito dalla sezione (A_1, A_2), se ogni numero di A_1 è minore di a, e ogni numero di A_2 ne è maggiore, la diseguaglianza non escludendo l'eguaglianza ».

Si definisce poi l'eguaglianza fra due di questi enti (A_1, A_2) e (A_1', A_2'):

$$\mathrm{def}(A_1, A_2) = \mathrm{def}(A_1', A_2') . = :: x \,\varepsilon\, A_1 . y \,\varepsilon\, A_2' : \supset_{x, y} . x \leqq y .\therefore x' \,\varepsilon\, A_2 . y' \,\varepsilon\, A_1' : \supset_{x', y'} . x' \geqq y'$$

« Si dice che le due sezioni (A_1, A_2) e (A_1', A_2') definiscono uno stesso numero, se ogni numero di A_1 è minore d'ogni numero di A_2', e ogni numero di A_2 maggiore d'ogni numero di A_1', la diseguaglianza non escludendo l'eguaglianza ».

In conseguenza il numero reale (razionale o irrazionale) è ciò che si ottiene per astrazione dalle sezioni, tenendo conto delle definizioni precedenti.

Invece di considerare amendue le classi A_1 e A_2, come già osservava il Dedekind, basta considerare p. e. la prima, A_1, poichè l'altra A_2 è l'insieme degli R che non sono A_1, in simboli: $A_2 = -A_1$. E per semplicità si può supporre che la classe A_1 non abbia massimo. Così arriviamo alla definizione del Pasch, *Einleitung in die differential und integral Rechnung* (Leipzig 1882). Questi chiama *segmento* (*Strecke* o *Zahlenstrecke*) ogni classe di numeri razionali (effettivamente esistente), non contenente tutti i razionali, tale che se contiene un numero x, contiene pure tutti i suoi minori, e non avente massimo. In simboli:

$$a \,\varepsilon\, (\mathrm{Strecke}) . = :: a \,\varepsilon\, \mathrm{KR} . a - = \Lambda . a - = \mathrm{R} .\therefore x \,\varepsilon\, a . y < x . \supset_{x, y} . y \,\varepsilon\, a .\therefore x \,\varepsilon\, a . \supset : y \,\varepsilon\, a . y > x . - =_y \Lambda$$

In seguito sostituisce alla parola *segmento* la parola *numero* (Zahl), sicchè, secondo Pasch i numeri reali sono i segmenti di numeri razionali.

Una difficoltà di forma nell'esposizione del Pasch si trova ove dice senza alcun schiarimento precedente o seguente (pag. 4): « Se il segmento A è limitato dal numero (razionale) a, sarà $A = a$ ». Ora fra due enti di natura diversa, cioè fra una classe A di numeri, ed un numero a, non può sussistere una eguaglianza, ma solo che un ente è collegato all'altro. Noi non possiamo affermare che il numero a sia identico al sistema A dei numeri di esso inferiori, ma solo che A è la classe degli R minori di a, o che a è ciò che limita A. Quindi per togliere quella difficoltà conviene di far corrispondere ad ogni segmento A un nuovo ente, che io indicherò con $\mathrm{l}'A$ (limite superiore degli A); e per indicare la relazione in questione si scriverà $\mathrm{l}'A = a$. I numeri reali sono allora i *limiti superiori* dei segmenti.

Invece di considerare i limiti superiori delle classi particolari di R chiamati segmenti di numeri, possiamo parlare dei limiti superiori delle classi di R in generale, e la trattazione acquista, a mio modo di vedere, semplicità. Eccone alcuni cenni. Possiamo proporci di definire prima i numeri reali positivi Q, ovvero direttamente i numeri reali q. Seguiremo la seconda via.

Sia a una classe di numeri razionali (Kr), e sia x un numero razionale. Può avvenire che esistano numeri della classe a maggiori di x, cioè esistano numeri $a \frown (x + \mathrm{R})$. Converremo di indicare questa relazione fra il numero x e la classe a scrivendo $x < \mathrm{l}'a$, che si può leggere « x è minore del limite superiore degli a »:

1. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Kr} \,.\, x \,\varepsilon\, \mathrm{r} : \supset : x < \mathrm{l}'a \,. = .\, a \frown (x + \mathrm{R}) - = \Lambda$ [Def.]

Risulta immediatamente che:

2. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Kr} \,.\, x, y \,\varepsilon\, \mathrm{r} \,.\, x < y \,.\, y < \mathrm{l}'a : \supset .\, x < \mathrm{l}'a$.

Essendo a una classe di razionali, e b un numero razionale, diremo che il limite superiore della classe a è il numero b, se ogni razionale minore del limite superiore degli a è minore di b, e viceversa:

3. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Kr} \,.\, b \,\varepsilon\, \mathrm{r} : \supset :: \mathrm{l}'a = b \,. = .\!\cdot.\, x \,\varepsilon\, \mathrm{r} \,.\, \supset_x : x < \mathrm{l}'a \,. = .\, x < b$

Per riconoscere l'eguaglianza fra i limiti superiori di due classi a e b si ha la regola:

4. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Kr} \,.\, \supset :: \mathrm{l}'a = \mathrm{l}'b \,. = .\!\cdot.\, x \,\varepsilon\, \mathrm{r} \,.\, \supset_x : x < \mathrm{l}'a \,. = .\, x < \mathrm{l}'b$

« I limiti superiori delle due classi a e b sono eguali, se ogni razionale minore dell'uno è pure minore dell'altro, e viceversa »; e questa regola si dimostra agevolmente se questi limiti superiori sono razionali, e si assume per definizione se irrazionali.

Essendo a e b due classi di razionali, $a + b$, com'è noto, indica l'insieme dei numeri che si ottengono sommando un numero qualunque della classe a con uno qualunque della classe b. Si ha:

5. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Kr} \,.\, \supset .\, \mathrm{l}'(a + b) = \mathrm{l}'a + \mathrm{l}'b$,

formola che si deve dimostrare quando i limiti superiori sono razionali, e assumere per definizione nel caso contrario. Analogamente pel prodotto, e così via.

Gli enti ora introdotti col nome di limiti superiori delle classi di razionali, cioè l'Kr, sono appunto i numeri reali, q, compresovi il $+\infty$:

6. $a \varepsilon \mathrm{Kr} . \supset .\because . \mathrm{l}'a = \infty . = : x \varepsilon \mathrm{r} . \supset_x . a \frown (x + \mathrm{R}) - = \Lambda$

e il $-\infty$, che si presenta quando $a = \Lambda$. Quindi

7. $\mathrm{q} = (\mathrm{l}'\mathrm{Kr}) (- \iota \infty) (- \iota - \infty)$

« I numeri reali sono i limiti superiori delle classi di razionali, esclusi il $+\infty$ e il $-\infty$ ».

Analogamente

8. $\mathrm{Q} = (\mathrm{l}'\mathrm{KR}) (- \iota \infty) (- \iota 0)$

I numeri reali si possono pure definire formalmente mediante una loro rappresentazione.

Data una successione indefinita di cifre (cioè dei numeri 0, 1, 2,... 9), $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ a questa successione facciamo corrispondere un nuovo ente, che indicheremo con

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots\ldots$$

e sopra questi enti definiremo le relazioni e operazioni in modo da farli coincidere colle frazioni decimali, la cui parte intera è 0. In tal modo, dare un numero reale equivale a dare la sua parte intera, e la legge che determina la serie delle sue cifre decimali.

La definizione dei numeri reali data dal Cantor (*Math. Ann.*, V, p. 123) parmi meno semplice delle precedenti.

Così ho esposto quei metodi di trattare i fondamenti dell'Aritmetica che, a mio avviso, sono migliori. Procurerò d'ora in avanti di tenere il lettore al corrente dei nuovi studii che si pubblicheranno su questo soggetto.

Nelle pagine precedenti moltissime questioni sono solamente accennate; le formule scritte contengono solo alcune delle proprietà delle operazioni studiate. Il mio scopo in certi punti fu di far puramente vedere come certe idee complesse si possano analizzare e decomporre in idee più semplici. Ma siffatte questioni a causa del loro interesse e dell'importanza che hanno, anche per l'uso scolastico, meritano di essere più profondamente esaminate; ed io raccomando vivamente agli studiosi questo genere di ricerche.

Sarebbe pure cosa utilissima il raccogliere tutte le proposizione note, che si riferiscono a certi punti della matematica, e pubblicare queste

raccolte. Limitandoci a quelle dell'aritmetica, non credo si possa trovare difficoltà ad esprimerle in simboli logici; ed allora esse, oltre all'acquistare nella precisione, acquistano pure in concisione; e probabilmente le proposizioni riflettenti certi soggetti della matematica possono essere contenute in un numero di pagine non maggiore di quello che richiederebbe la loro bibliografia.

Il trasformare in simboli le proposizioni e le dimostrazioni espresse sotto la forma comune è spesso cosa facile. Ed è cosa facilissima ove si tratti delle proposizioni degli autori più accurati che già analizzarono le loro idee; basta nelle opere di questi autori sostituire alle parole del linguaggio comune i loro simboli equivalenti. La cosa presenta maggiori difficoltà in altri autori; qui occorre analizzare completamente le idee dell'autore, onde poterle tradurre in simboli; e non è raro il caso che una proposizione pomposamente annunziata non sia che una identità logica, o una proposizione precedente, o una forma priva di sostanza.

La *Rivista di Matematica* procurerà nel prossimo anno di pubblicare delle raccolte di questo genere; quindi invitiamo i lettori a comporne, e a volercene inviare.

Lettera aperta al Prof. G. Veronese.

Chiarissimo Professore,

Nel suo recente libro *Fondamenti di geometria a più dimensioni,* ecc., Ella ebbe la bontà di occuparsi di miei scritti, dandone qualche volta dei giudizi favorevoli al di là dei miei meriti. Però mi permetta poche osservazioni.

Ella a pag. XXVIII parlando affatto in generale dice:

Ad ogni modo non vediamo alcuna differenza sostanziale fra le ipotesi o postulati astratti e le definizioni o convenzioni di segni necessarie allo svolgimento della scienza.

E finchè questa confusione fra ipotesi e definizioni si riferisce al suo lavoro, io condivido la sua opinione. Ma Ella aggiunge in nota:

Ad es. il sig. Peano (Arithmetices pr.) dà come assioma: se a e b sono numeri interi eguali, $a+1$, $b+1$ sono pure numeri eguali. E poi come definizione: se p, q, p', q' sono numeri interi qualunque ed è $\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$ si ha $x\frac{p}{q}=x\frac{p'}{q'}$. Questa proposizione è evidentemente della stessa natura della prima.

Ora io mi permetto di farle osservare che la mia definizione (2 del § 8) fu stampata come segue:

$$p, q, p', q' \varepsilon \mathrm{N} . \supset :: \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} . = .\therefore x \varepsilon \mathrm{N} . x\frac{p}{q}, x\frac{p'}{q'} \varepsilon \mathrm{N} : \supset_x . x\frac{p}{q} = x\frac{p'}{q'} .$$

la quale in linguaggio ordinario suona:

« Se p, q, p', q' sono numeri interi qualunque, allora dire che le due frazioni $\frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$ sono eguali, equivale a dire che, comunque si prenda l'intero x, purchè i prodotti $x\frac{p}{q}$ e $x\frac{p'}{q'}$ siano numeri interi, questi prodotti risultano eguali ».

Quindi Ella riportando quella mia definizione, sopprime il segno $\supset ::$, poi il gruppo di segni $= .\therefore x \varepsilon \mathrm{N} . x\frac{p}{q}, x\frac{p'}{q'} \varepsilon \mathrm{N} :$, che corrispondono alle parole sottolineate; e se dopo questa soppressione le due proposizioni Le sembrano d'una stessa natura, non credo d'averci io alcun torto.

A pag. 608 Ella, a proposito dei miei *Principii di Geometria*, dice:

Potremmo fare alcune osservazioni su alcuni degli assiomi del sig. Peano, specialmente sui primi, come anche sull'uso di premettere definizioni o dedurre teoremi che dipendono da assiomi dati più tardi.

E in nota aggiunge: *V. ad es. le prop. del § 2 e il teorema 2 del § 5.*

E poichè Ella tace queste osservazioni che potrebbe fare, io La prego di voler spiegare come mai una fra le mie definizioni (che sono le prop. del § 2), le quali tutte esprimono pure convenzioni di segni abbreviativi, possa dipendere da un qualche assioma, anzichè dal mio libero arbitrio.

E La prego parimenti di voler far vedere esplicitamente da qual assioma consecutivo dipenda il teorema 2 del § 5, o altro teorema qualsiasi del mio libro.

In una nota a pag. 613 Ella si occupa di una mia polemica, parte della quale, Ella dice, *è rivolta contro gli iperspazii nel senso da me* (Veronese) *inteso.* E soggiunge che *non è difficile rispondere alle sue affermazioni* (cioè di Peano).

Non mi occupo della *forma* di questa sua sentenza. Ma osservo in primo luogo che l'illustre Professore e mio egregio collega C. Segre,

con cui si sono dibattute alcune questioni, rispose bensì, ma senza negare alcuna delle mie affermazioni sugli iperspazii; in secondo luogo osservo che quelle mie affermazioni sugli iperspazii, se vere, distruggono dalle fondamenta il libro ora da Lei pubblicato. Quindi non mi pare di abusare della Sua bontà pregandola di voler rendere di pubblica ragione questa *non difficile risposta* alle mie affermazioni.

E mentre si attende questa sua risposta, fra la mia affermazione accompagnata dalla prova, e la sua negazione scompagnata dalla medesima, non parmi dubbio il giudizio delle persone di buon senso.

Colla massima stima ho l'onore di professarmi

Torino, 1° dicembre 1891.

Suo devotissimo G. PEANO.

Il teorema fondamentale di Trigonometria sferica.

Siano a, b, c le faccie d'un triedro, α, β, γ i suoi diedri. Prendansi tre vettori A, B, C diretti secondo gli spigoli del triedro, ed in grandezza eguali all'unità di misura. Si decomponga B in due vettori B' e B'', il primo diretto secondo A, ed il secondo normale ad A; e si decomponga analogamente C nei due vettori C', parallelo ad A, e C'' normale ad A. Sarà $B = B' + B''$ e $C = C' + C''$; onde moltiplicando (ossia facendo il prodotto interno dei due vettori) si ha:

$$B \times C = B' \times C' + B' \times C'' + B'' \times C' + B'' \times C''.$$

Ma $B \times C = \cos a$, $B' \times C' = \cos b \cos c$, $B' \times C'' = B'' \times C' = 0$,

$$B'' \times C'' = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \alpha,$$

onde $$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \alpha$$

che è la formola cercata.

Questa elegante applicazione del prodotto interno devesi al sig. E. CARVALLO, *Sur une généralisation du théorème des projections* (Nouvelles Annales de Mathématiques, t. IX, agosto 1891). L'A. incomincia questa breve comunicazione dicendo:

« Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème des projections. Elle est bien connue, très employée en Mécanique pour évaluer le travail d'une force, et pourtant elle est généralement omise dans les cours de Mathématiques spéciales. Serait-elle donc de peu d'usage en Trigonométrie et en Géométrie analytique? Je veux montrer ici qu'au contraire, dans les deux cas, elle peut rendre de grandes services et simplifier beaucoup les démonstrations ».

E porta come esempi la dimostrazione della formula ora considerata, e della formula che dà, in assi obliqui, la distanza d'un punto dall'origine.

Il prodotto interno dei due vettori A e B è indicata dall'A. con $A|B$, secondo Grassmann. (P.)

RECENSIONE

Guida al calcolo delle Coordinate Geodetiche di Nicodemo Jadanza, Professore di Geodesia nella R. Università e di Geometria pratica nella R. Scuola degli Ingegneri di Torino. — Torino, Loescher, 1891. — Prezzo L. 4.

I punti della superficie terrestre sono individuati quando per ciascuno di essi si conosca la latitudine, la longitudine rispetto ad un dato meridiano, e l'altezza in metri sul livello medio del mare. In molti lavori di geodesia si considerano i punti come giacenti al livello stesso del mare, ed, ove occorra, ad essa si riducono con processi di calcolo. Si viene così a sostituire alla superficie reale terrestre, una matematica: si ritiene che questa sia un'ellissoide di rivoluzione schiacciata ai poli; per le costanti di essa si addottano quelle determinate da Bessel; od in taluni casi quelle di Clarke. Sopra l'ellissoide di Bessel un punto è determinato tostochè se ne conosce la latitudine e longitudine: la lunga determinazione astronomica di esse, e sopratutto gli scopi della geodesia pratica, hanno reso necessario di determinare con altre coordinate di più spedita ricerca i punti di quell'ellissoide.

Così si determina un punto M rispetto ad uno dato A, a mezzo della lunghezza della geodetica AM e dell'azimut di essa contato nel senso *Nord-Est-Sud-Ovest* da 0° a 360° dal meridiano di A. La geodetica e l'azimut di essa sono le *coordinate geodetiche polari* del punto M rispetto alla origine A. La longitudine e la latitudine di M sono le sue *coordinate geografiche.*

Se immaginiamo per il punto A condotto il meridiano e per il punto M la geodetica MC ad esso perpendicolare e che lo incontra nel punto C; l'arco di meridiano AC, e quello di geodetica MC, sono dal Prof. Jadanza chiamate *coordinate geodetiche ortogonali* del punto M. Gli autori che prima del Jadanza si occuparono di questo argomento, chiamavano le coordinate testè definite, *coordinate sferiche ortogonali,* per rammentare la *sfera ausiliaria* che aveva servito a Soldner, che pel primo le introdusse in Geodesia, nel definirle, e che fu sempre, fino al Jadanza, adoperata in taluni casi ad esse relativi.

Il passaggio dall'uno all'altro di questi sistemi di coordinate costituisce uno dei più importanti problemi della geodesia: di esso si occuparono, i geodeti più conosciuti, giungendo per diverse vie a varie soluzioni. I trattati di Helmert, Jordan, Andrae, Börsch, Zachariae, riassumono tutti quei lavori, non senza contributo di nuove aggiunte.

Il Prof. Jadanza, con pochi teoremi di geometria differenziale, di facile dimostrazione (1), e collo sviluppo della serie di Legendre fino al 5° ordine

(1) A pag. 8, linea 36, invece di *AA' eguali*, deve leggersi, come appare chiaramente da tutto il contesto, *AA' perpendicolari ed eguali.*

inclusivamente, è riuscito ad ottenere delle formole semplicissime e pratiche veramente per la risoluzione numerica del problema della trasformazione di quei tre sistemi di coordinate, nel caso più comune di moderate distanze, così importante pel computo delle reti geodetiche e pel calcolo delle deviazioni della verticale.

Ci pare utile ed elegante assai la formola (20) a pag. 28:

$$\log(\varphi' - \varphi) = \log \frac{S}{\rho \operatorname{sen} 1''} - KS - LS^2,$$

che, se non andiamo errati, è data per la prima volta. Quest'espressione dà la latitudine φ' dell'estremo di un arco di meridiano di lunghezza S, quando si conosce la latitudine φ dell'altro estremo; a mezzo di essa son resi più facili e semplici i risultati finali, in grazia delle tavole numeriche ausiliarie che danno i logaritmi di K ed L: di ciò hassi un evidente esempio a pag. 32 ove studiasi la relazione fra le coordinate geografiche e le geodetiche ortogonali, e più avanti (pag. 35 e seg.) ove si tratta del calcolo delle posizioni geografiche dei vertici di una rete trigonometrica. Nella trattazione di quest'argomento viene addotto come esempio numerico quello stesso che trovasi a pag. 88 dell'*Istruzione per i lavori trigonometrici* pubblicata nel 1889 dalla Giunta superiore del catasto. Le formole del Prof. Jadanza sono tali, come egli stesso afferma in nota nella Prefazione, da permettergli di ottenere risultati della medesima esattezza risparmiando la scrittura di cinquantacinque numeri di 5 o 7 cifre ciascuno. Ogni calcolatore, che sa quanto semplicità e brevità significhino sicurezza di non sbagliare, apprezzerà altamente quei procedimenti rigorosi ad un tempo e spediti.

La *Guida* del Prof. Jadanza contiene altresì una facile dimostrazione di parecchie formole date da altri: le tavole annesse, in parte note ed in parte nuove, furono dall'autore estese così che le sue formole possano servire per tutte le regioni comprese fra i paralleli aventi le latitudini 35° e 70°.

In appendice al lavoro son dati un cenno ed una tavola ausiliaria pel computo delle *coordinate rettilinee rettangolari* di un *foglio della carta d'Italia:* coordinate che l'autore chiama a buon diritto *coordinate dello Stato Maggiore,* perchè furono adoperate dall'Istituto Geografico Militare Italiano nella costruzione della carta d'Italia al centomila, che è comunemente nota col nome di *Carta dello Stato Maggiore.* La tavola ausiliaria va dal parallelo di 36° a quello di 47°, quanto serve ampiamente per l'Italia.

Nel complesso pertanto del libro, che stiamo esaminando, si hanno i metodi per passare dalle coordinate rettilinee rettangolari alle geodetiche e viceversa, il che è necessario in molti casi della pratica.

Noi siamo certi che quanti studieranno questa *Guida al calcolo delle coordinate geodetiche* del Prof. Jadanza, conchiuderanno come noi, che esso è un pregevolissimo lavoro, che non può non tornare grandemente utile alla pratica dei calcoli geodetici, mentre in certi punti contribuisce efficacemente al perfezionamento di talune deduzioni teoriche.

Torino, Novembre 1891. OTTAVIO ZANOTTI BIANCO.

RECENSIONE

Guida al calcolo delle Coordinate Geodetiche di NICODEMO JADANZA, Professore di Geodesia nella R. Università e di Geometria pratica nella R. Scuola degli Ingegneri di Torino. — Torino, Loescher, 1891. — Prezzo L. 4.

I punti della superficie terrestre sono individuati quando per ciascuno di essi si conosca la latitudine, la longitudine rispetto ad un dato meridiano, e l'altezza in metri sul livello medio del mare. In molti lavori di geodesia si considerano i punti come giacenti al livello stesso del mare, ed, ove occorra, ad essa si riducono con processi di calcolo. Si viene così a sostituire alla superficie reale terrestre, una matematica: si ritiene che questa sia un'ellissoide di rivoluzione schiacciata ai poli; per le costanti di essa si addottano quelle determinate da Bessel; od in taluni casi quelle di Clarke. Sopra l'ellissoide di Bessel un punto è determinato tostochè se ne conosce la latitudine e longitudine: la lunga determinazione astronomica di esse, e sopratutto gli scopi della geodesia pratica, hanno reso necessario di determinare con altre coordinate di più spedita ricerca i punti di quell'ellissoide.

Così si determina un punto M rispetto ad uno dato A, a mezzo della lunghezza della geodetica AM e dell'azimut di essa contato nel senso *Nord-Est-Sud-Ovest* da 0° a 360° dal meridiano di A. La geodetica e l'azimut di essa sono le *coordinate geodetiche polari* del punto M rispetto alla origine A. La longitudine e la latitudine di M sono le sue *coordinate geografiche.*

Se immaginiamo per il punto A condotto il meridiano e per il punto M la geodetica MC ad esso perpendicolare e che lo incontra nel punto C; l'arco di meridiano AC, e quello di geodetica MC, sono dal Prof. Jadanza chiamate *coordinate geodetiche ortogonali* del punto M. Gli autori che prima del Jadanza si occuparono di questo argomento, chiamavano le coordinate testè definite, *coordinate sferiche ortogonali,* per rammentare la *sfera ausiliaria* che aveva servito a Soldner, che pel primo le introdusse in Geodesia, nel definirle, e che fu sempre, fino al Jadanza, adoperata in taluni casi ad esse relativi.

Il passaggio dall'uno all'altro di questi sistemi di coordinate costituisce uno dei più importanti problemi della geodesia: di esso si occuparono, i geodeti più conosciuti, giungendo per diverse vie a varie soluzioni. I trattati di Helmert, Jordan, Andrae, Börsch, Zachariae, riassumono tutti quei lavori, non senza contributo di nuove aggiunte.

Il Prof. Jadanza, con pochi teoremi di geometria differenziale, di facile dimostrazione [1], e collo sviluppo della serie di Legendre fino al 5° ordine

---

[1] A pag. 8, linea 36, invece di *AA' eguali,* deve leggersi, come appare chiaramente da tutto il contesto, *AA' perpendicolari ed eguali.*

inclusivamente, è riuscito ad ottenere delle formole semplicissime e pratiche veramente per la risoluzione numerica del problema della trasformazione di quei tre sistemi di coordinate, nel caso più comune di moderate distanze, così importante pel computo delle reti geodetiche e pel calcolo delle deviazioni della verticale.

Ci pare utile ed elegante assai la formola (20) a pag. 28:

$$\log(\varphi' - \varphi) = \log \frac{S}{\rho \operatorname{sen} 1''} - KS - LS^2,$$

che, se non andiamo errati, è data per la prima volta. Quest'espressione dà la latitudine φ' dell'estremo di un arco di meridiano di lunghezza S, quando si conosce la latitudine φ dell'altro estremo; a mezzo di essa son resi più facili e semplici i risultati finali, in grazia delle tavole numeriche ausiliarie che danno i logaritmi di K ed L: di ciò hassi un evidente esempio a pag. 32 ove studiasi la relazione fra le coordinate geografiche e le geodetiche ortogonali, e più avanti (pag. 35 e seg.) ove si tratta del calcolo delle posizioni geografiche dei vertici di una rete trigonometrica. Nella trattazione di quest'argomento viene addotto come esempio numerico quello stesso che trovasi a pag. 88 dell'*Istruzione per i lavori trigonometrici* pubblicata nel 1889 dalla Giunta superiore del catasto. Le formole del Prof. Jadanza sono tali, come egli stesso afferma in nota nella Prefazione, da permettergli di ottenere risultati della medesima esattezza risparmiando la scrittura di cinquantacinque numeri di 5 o 7 cifre ciascuno. Ogni calcolatore, che sa quanto semplicità e brevità significhino sicurezza di non sbagliare, apprezzerà altamente quei procedimenti rigorosi ad un tempo e spediti.

La *Guida* del Prof. Jadanza contiene altresì una facile dimostrazione di parecchie formole date da altri: le tavole annesse, in parte note ed in parte nuove, furono dall'autore estese così che le sue formole possano servire per tutte le regioni comprese fra i paralleli aventi le latitudini 35° e 70°.

In appendice al lavoro son dati un cenno ed una tavola ausiliaria pel computo delle *coordinate rettilinee rettangolari* di un *foglio della carta d'Italia:* coordinate che l'autore chiama a buon diritto *coordinate dello Stato Maggiore,* perchè furono adoperate dall'Istituto Geografico Militare Italiano nella costruzione della carta d'Italia al centomila, che è comunemente nota col nome di *Carta dello Stato Maggiore.* La tavola ausiliaria va dal parallelo di 36° a quello di 47°, quanto serve ampiamente per l'Italia.

Nel complesso pertanto del libro, che stiamo esaminando, si hanno i metodi per passare dalle coordinate rettilinee rettangolari alle geodetiche e viceversa, il che è necessario in molti casi della pratica.

Noi siamo certi che quanti studieranno questa *Guida al calcolo delle coordinate geodetiche* del Prof. Jadanza, conchiuderanno come noi, che esso è un pregevolissimo lavoro, che non può non tornare grandemente utile alla pratica dei calcoli geodetici, mentre in certi punti contribuisce efficacemente al perfezionamento di talune deduzioni teoriche.

Torino, Novembre 1891. OTTAVIO ZANOTTI BIANCO.

AL LETTORE

Nel por termine al primo volume della *Rivista* è nostro dovere il ringraziare i collaboratori e i lettori che coi loro scritti, coi loro consigli e col loro appoggio, validamente ci aiutarono e ci aiuteranno nel nostro lavoro.

Vivi ringraziamenti sono dovuti agli egregi professori e carissimi amici Francesco Porta, Filiberto Castellano e Francesco Porro, che col sottoscritto dividono le non indifferenti spese della pubblicazione di questo volume.

Per la Redazione

G. Peano.

e il
con-
nel

imi
che
e di